

الحكومة المصرية — وزارة المعارف العمومية

مراقبة التعليم الفني

كاتب

الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

تأليف

شارلس سميث

المدرس بكلية سدني سكس بكبرديج

وترجمة

محمد عبيد افندي

مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية سابقا

والآن ناظر مدرسة بنى سويف الابتدائية

الجزء الأول

راجعته ونشره قلم الترجمة العالمية ونشر الكتب بالادارة

قد ترجم هذا الكتاب ونشر باذن من الخواجات مكلان وشركائه ليند بلوندره

(حقوق الطبع محفوظة للوزارة)

الطبعة الرابعة

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٤٣ ٥ ١٦ م

الحكومة المصرية — وزارة المعارف ~~المصرية~~

مراقبة التعليم الفني

كتاب

الخوارزمية للقسطائيا المخبرين

تأليف

شارلس سميث

المدرس بكلية سدني سكس بكبرديج

وترجمة

محمد عبيد افندى

مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية سابقا

والآن ناظر مدرسة بنى سويف الابتدائية

الجزء الأول

راجعته ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة

قد ترجم هذا الكتاب ونشر باذن من الجوابات مكملان وشركائه ليتند بلوندره

(حقوق الطبع محفوظة للوزارة)

الطبعة الرابعة

بالطبعة الأميرية بالقاهرة

٠ ١٩٢٤ ٨ ١٣٤٣

مباحث الجزء الأول

من كتاب الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

صفحة

الفصل الأول — الخواص العمومية للقطاعات المخروطية...	١
الفصل الثاني — القطع المكافئ	٣٩
الفصل الثالث — القطع الناقص	٩٩
الفصل الرابع — القطع الزائد	١٥٢
الفصل الخامس — قطاعات المخروط	٢١٦

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه
وجميع الأنبياء والمرسلين .

الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

الجزء الأول

الفصل الأول

(١ - تعاريف) - (القطاع المخروطي) هو منحن ترسمه نقطة متحركة في مستو مشتمل على نقطة ثابتة ومستقيم ثابت بحيث تكون النسبة بين بعدها عن النقطة والمستقيم المذكورين ثابتة .
النقطة الثابتة تسمى (بورة المنحنى) والمستقيم الثابت يسمى (الدليل) والنسبة الثابتة تسمى (الاختلاف المركزى)

وسنبين فيما بعد أننا لو قطعنا مخروطاً دائرياً قائماً بمستو فالتقاطع الحادث هو دائماً قطاع مخروطي مطابق للتعريف السابق وعند ما درست خواص هذه المنحنيات في أول الأمر كان البحث فيها باعتبارها قطاعات مخروط

إذا كان الاختلاف المركزى أصغر من الوحدة سمي المنحنى (قطاعاً ناقصاً) وإذا كان مساوياً لها سمي (قطاعاً مكافئاً) وإذا كان أكبر منها سمي (قطاعاً زائداً)

٢ - والفرض وهو معرفة الخواص الهندسية الشهيرة للمنحنيات ولنبدأ بإيجاد وضع المنحنيات المختلفة وشكلها

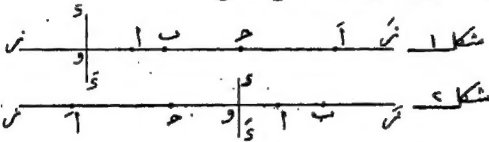
النظرية الأولى - كيفية إيجاد نقط تقاطع منحن معلوم بورته ودليله

واختلافه المركزى بخط مستقيم مار بالبورة وعمودى على الدليل

لفرض أن ب هي بورة المنحنى ب و د هو الدليل

ثم نرسم $ز ب$ عموداً على الدليل وماراً بالبورة $ب$ فيقطع الدليل في نقطة $و$
ثم نأخذ نقطة $ا$ على المستقيم $ب و$ بحيث تكون نسبة $ب ا$ الى $ا و$ مساوية
للاختلاف المركزي للمنحنى فتكون نقطة $ا$ واقعة على المنحنى
ثم نقسم $ب و$ بنقطة خارجة مثل نقطة ٦ بحيث يكون
 $ب ٦ : ٦ و = ب ا : ا و$

واذن تكون ٦ أيضاً واقعة على المنحنى



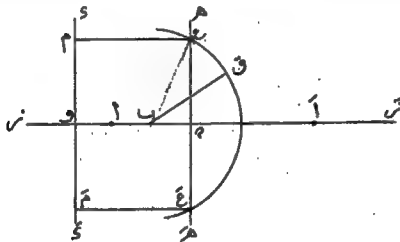
وتكون نقطة ٦ واقعة على امتداد الخط $ب و$ اذا كان $ب ا$ اصغر من $ا و$ أى
اذا كان المنحنى قطعاً ناقصاً (شكل ١) وتكون نقطة ٦ واقعة على امتداد الخط
 $ب و$ اذا كان $ب ا$ اكبر من $ا و$ أى اذا كان المنحنى قطعاً زائداً (شكل «٢»)
واذا فرضنا في كل من الحالتين أن الاختلاف المركزي يقرب من الوحدة
شيئاً فشيئاً فان بعد نقطة ٦ من البورة يزداد شيئاً فشيئاً الى ما لا نهاية وحينئذ
تكون احدي النقط التي يقطع فيها خط $ز ب$ المنحنى القطع المكافئ الذى
بورته نقطة $ب$ ودليله $ز و$ على بعد لانهاية له من نقطة $ب$ فيتضح اذن أن
العمود النازل من بورة المنحنى على الدليل يقطع المنحنى في نقطتين ويكونان
في جهة واحدة من الدليل اذا كان المنحنى قطعاً ناقصاً وفي جهتين متقابلتين
منه اذا كان قطعاً زائداً وكذلك العمود النازل من بورة القطع المكافئ على
الدليل لا يقطع المنحنى الا في نقطة واحدة على بعد محدود من البورة

٣ — النظرية الثانية — كيفية ايجاد تقاطع القطاع المخروطى
المعلوم بورته ودليله واختلافه المركزي مع مستقيم مواز للدليل

لذلك نفرض ب بورة المنحنى ك د د الدليل

ثم نرسم ن ب ن ب عمودا على الدليل من البورة ب فيقطعه في نقطة و
ثم نفرض نقطة ما على ن ب ن ب كنقطة د ونرسم منها المستقيم ه د ه
موازيا للدليل

ثم نركز بالبرجل في نقطة ب ونرسم دائرة نصف قطرها مساو للمستقيم ب و
بحيث تكون النسبة بين ب و وبين د و مساوية للاختلاف المركزي فيقطع
محيط هذه الدائرة المستقيم ه د ه في نقطتي ع ك ع فتكون هاتان النقطتان
واقعتين على المنحنى



لأنه إذا كان ع م ع م عمودين على الدليل يحدث أن

$$م ع = د = م ع$$

وبناء عليه يكون ب ع : ع ب = م ع : ع ب = م ع : ب و = د : و
وسنبرهن في البند السادس على أن محيط الدائرة المرسومة بالطريقة المذكورة
يقطع المستقيم ه د ه بشرط أن تكون نقطة د واقعة بين ا ٦ ا ٦ في حالة ما إذا
كان المنحنى قطعاً ناقصاً وأن لا تكون واقعة بين ا ٦ ا ٦ إذا كان قطعاً زائداً .

وحيث ان ب ع = ب ع ك و ب و عمود على ع ع فيلزم أن
يكون ع د مساوياً للمستقيم ه ع

ويقال ان المنحنى (مماثل) بالنسبة لمستقيم معلوم اذا كانت كل نقطة من نقط المنحنى تناظرها نقطة أخرى منه بحيث يكون الوتر الواصل بين النقطتين عمودا على المستقيم المفروض ومنصفاً به والمستقيم المفروض يسمى (محور المنحنى)

(واذن فالمنحنى متماثل بالنسبة للعمود النازل من البورة على الدليل) ولذلك
سمى هذا المستقيم محور المنحنى

ونقطة تقابل الحوز بالمنحنى تسمى (رأساً)

وَبِنَاء عَلَيْهِ فَنَقُطُهَا. ٦٦١ فِي الْبَنْدِ الثَّانِي هُمَا رَأْسَانِ لِلنَّحْنِي .

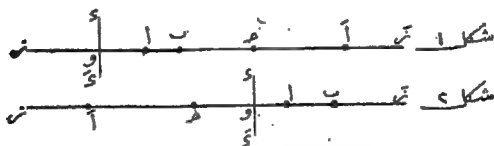
وقد يسمى المستقيم ٦١ المنتهى برأسي المنحنى محور المنحنى

٤ - إذا فرضنا بالبند الثاني أن نقطة α هي منتصف AB يحدث

$$97:70 = 91:60$$

$$0.7 + 0.1; 70 + 10 = 0.1; 10 \quad \therefore$$

$$10 - 7 = 3$$



وبناء عليه ففي القطع الناقص (شكل ١)

$$1 \circ 2 : 1 \circ 2 = 1 \circ 2 : 1 \circ 2 = 1 : 1$$

وفي القطع الزائد (شكل ٢)

$$و : ح = ا : ب$$

وعليه يحدث في كلا المنحنيين.

$$ح : ب = ١ ح : ١ ح = ١ ح : ١ ح = ١ ح : ١ ح$$

ومنه يحدث أيضا

$$ح = ٢ ح = ٢ ح = ٢ ح$$

$$\frac{٢}{١} : \frac{٢}{١} = ح : ح = ح : ح$$

وكذلك

$$\frac{٢}{١} : \frac{٢}{١} =$$

ولو فرضنا أن الاختلاف المركزي لمنحن مساو للنسبة ه : ١ بحيث يكون ب : ١ ح = ١ ح : ١ ح وبناء على ذلك يكون ب : ١ ح = ١ ح : ١ ح ويمكن اختصار الارتباطات السابقة ووضعها كما يأتي

$$ح = ح = ١ ح = ١ ح = ١ ح$$

$$٦ ح = ٦ ح = ٦ ح = ٦ ح = ٦ ح$$

(مسألة ١) إذا أخذت نقطتان على قطاع مخروطي متساويتا البعد عن بورة فانه يطلب البرهنة على أن المستقيم الواصل بينهما مواز للدليل وأن البعدين البوريين لهاتين النقطتين متساويا الميل على المحور.

(مسألة ٢) إذا علم الدليل لقطاع مخروطي وعلمت نقطتان من نقط المنحنى المذكور فاثبت أن البورة يلزم أن تكون واقعة على محيط دائرة ثابتة

(مسألة ٣) عين بورة قطاع مخروطي معلوم دليله وثلاث نقط من نقط المنحنى وكمنحنيا يمكن رسمها بحيث توفى الشروط المعلومة

(مسألة ٤) إذا كان محيط دائرة يمر بنقطة ثابتة ويقطع مستقيما ثابتا ويصنع معه زاوية معلومة فاثبت أن مركز الدائرة يكون واقعا على منحنى قطع زائد ثابت

(مسألة ٥) ب عبارة عن بورة قطاع مخروطى Γ ع نقطة من نقطه والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للمستقيم ب ع هو قطاع مخروطى اختلافه المركزى كالاختلاف المركزى للمنحنى المفروض وبورته نقطة ب ودليله واقع فى منتصف البعدين ب و دليل المنحنى الأول

(مسألة ٦) اذا فرضنا أن ب بورة قطاع مخروطى Γ ع أى نقطة من نقطه فالمطلوب ايجاد المحل الهندسى لنقطة مثل د تقسم ب ع بحيث تكون النسبة ب د : ب ع ثابتة

(مسألة ٧) أثبت أن المنحنيين اللذين بورتهما واحدة ودليلهما واحد لا يتقاطعان

(مسألة ٨) عين الدليل لمنحن معلوم بورته واختلافه المركزى ونقطتان من نقطه وفى كم وضعاً يمكن أن يوجد الدليل

(مسألة ٩) عين بورة منحني معلوم دليله والاختلاف المركزى ونقطتان من نقطه وفى كم وضعاً يمكن أن توجد البورة

(مسألة ١٠) أثبت أن نسبة طول الوتر البورى لأى منحن الى ضعف البعد بين منتصف هذا الوتر والدليل تساوى الاختلاف المركزى للمنحنى

٥ — النظرية الثالثة — كيفية ايجاد نقط تقاطع منحني معلوم بورته والدليل والاختلاف المركزى مع أى مستقيم مواز للحوار

نفرض أن نقطة ب هى بورة القطاع Γ د Γ هو الدليل ثم نعين رأسى المنحنى وليكونا Γ ٦ Γ وننصف Γ ٦ فى نقطة ح

ثم نفرض م م موازياً للحوار ويقطع الدليل فى نقطة م

ثم نبحث عن نقط تقاطع م م مع المنحنى

$$u : u = m \mid : \mid u$$

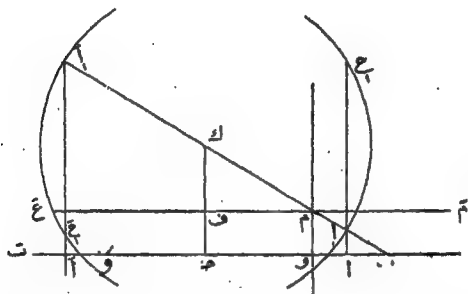
$$a:1u = 7:7u = m:7u \quad 6$$

$$r_1 : 1u = r_1 : 1u \quad \therefore$$

$$a : b = m : n = mv : vn$$
$$10:100 = 1:10 = 10:100$$

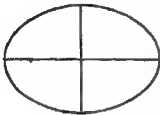
المنحني

77 6 11



٦ - إذا فرضنا في البند السابق أن محيط الدائرة يقطع المستقيم l في نقطة e ويقطع المستقيم l في نقطة g يكون كل من l, e, g موازيا للمستقيم l حيث أن الزاويتين l, e, g قائمتان

وفي حالة القطع الناقص (شكل ١) يبعد E عن مركز الدائرة أكثر من A أو E حيث إن نقطة A ونقطة E واقعتان في جهة واحدة من M وبناء عليه يكون E أصغر من A أي أن E أصغر من A ومنه يستنتج أن القطع الناقص واقع كله بين المستقيمين AA و EE



إذا كانت E نقطة ما على منحنى القطع الناقص AA هو العمودى على الدليل فحيث أن E واقعة بين المستقيمين AA و EE فيلزم أن يكون E أصغر من A و عليه يكون B أصغر من A

ومن ذلك يتضح أن كل نقطة من نقط منحنى القطع الناقص تبعد عن البؤرة بمسافة محدودة وبناء عليه فالقطع الناقص عبارة عن منحن بيضاوى مقفل

ولو رسمنا E و A موازيا للدليل مع فرض أن تقطعي E و A في وضعين بحيث أن $B = E = B = A = X$ و E و A تكونان نقطتين من نقط منحنى القطع الناقص وأنهما نهايتا المحور المزاوج

وفي حالة القطع الزائد (شكل ٢) يكون E أقرب الى مركز الدائرة من كل من A و E لأن A واقعة بين AA و EE

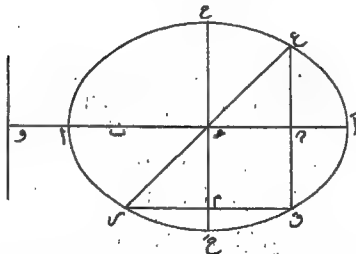
وعليه يكون E أكبر من A ومنه يستنتج أن منحنى القطع الزائد واقع كله خارج المستقيمين AA و EE وحيث أن M واقعة داخل الدائرة فيكون M قاطعا للدائرة دائما في نقطتين حقيقتين وواضح أيضا أن E يتزايد الى ما لا نهاية بازدياد M وحيثئذ فنحنى القطع الزائد عبارة عن منحن مشتمل على فرعين منفصل أحدهما عن الآخر كما في الشكل الآتي

٧ - المنحنيات ذات المركز

لنفرض E أى نقطة على منحنى قطع زائد أو قطع ناقص . ثم نرسم منها موازيا للدليل فيقطع Γ في D ويقطع المنحنى فى نقطة ثانية مثل F وبمقتضى النظرية الثانية يحدث أن $E = D = F$ كما فى النظرية الثانية ثم نرسم من نقطة D مستقيما موازيا للمستقيم Γ فيقطع المنحنى فى r ويقطع المستقيم المرسوم من r موازيا للدليل فى نقطة M . فبمقتضى النظرية الثالثة يحدث أن $D = M = r$ (بمقتضى النظرية الثالثة)



وحيث أن $E = D = F$ وأن $D = r$ فإن $E = M = r$ فنتج أن $E = r$ مستقيم وأن $r = E$



واذن فلو كانت E نقطة ما على منحنى قطع ناقص أو قطع زائد وممددنا خط E على استقامته الى نقطة r بحيث يكون $r = E$ فتكون

نقطة ϵ واقعة أيضا على المنحنى وتكون نقطة ϵ منصفة لجميع الأوتار التي تمر بها ولذلك سميت نقطة ϵ (مركز المنحنى)

ويسمى منحنى القطع الناقص ومنحنى القطع الزائد (منحنيين ذوي مركز) لتمييزهما من منحنى القطع المكافئ الذي لا مركز له أو لأن مركزه بعيد عن البؤرة بعدا لا نهاية له

(ملحوظة) — يمكن اعتبار منحنى القطع المكافئ الوضع النهائي لمنحنى قطع ناقص أو زائد ومن المفيد أن تستنتج من أى خاصية من خواص منحنى القطع الناقص أو القطع الزائد الخاصة المناظرة لها في القطع المكافئ في حالة ما إذا كانت خواص هذين المنحنيين غير متحدة تمام الاتحاد والأفضل تأجيل ذلك الى أن ندرس الخواص الهندسية للقطع المكافئ في الفصل التالي

٨ — النظرية الرابعة — كيفية اثبات أن المنحنى ذا المركز له بورتان ودليلان

لذلك نثبت أولا كما في البند الخامس أن منحنى القطع الناقص أو منحنى القطع الزائد متماثل بالنسبة للمستقيم المرسوم من نقطة ϵ موازيا للدليل فينتج من ذلك أننا إذا أخذنا نقطتين على المحور القاطع مثل β و γ بحيث يكون $\epsilon\beta = \epsilon\gamma$ و $\beta\epsilon = \gamma\epsilon$ فتكون لنقطة β نفس الخواص التي لنقطة γ بالنسبة للمنحنى

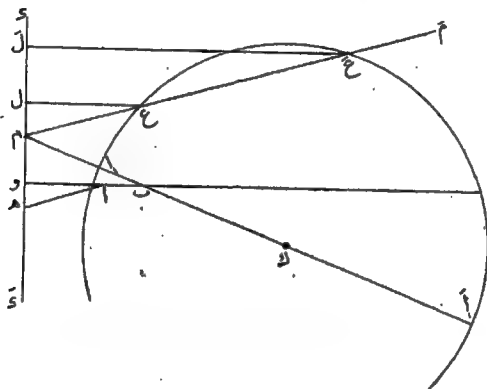
وعليه تكون نقطة β بؤرة أخرى للمنحنى ويكون الدليل المناظر لها هو المستقيم المرسوم من β موازيا للدليل الأصلي

فيتضح اذن (أن كلا من منحنى القطع الناقص والقطع الزائد له بورتان ودليلان)

٩ - النظرية الخامسة - كيفية إيجاد نقط تقاطع مستقيم معلوم مع

منحن معلوم پورته ودليله واختلافه المركزي

نفرض أن b هي بورة المنحنى \mathcal{C} و ω هو الدليل



ونفرض أن M هو المستقيم المعلوم القاطع للدليل في نقطة M

ثم نأخذ نقطة a على المستقيم b و b بحيث يكون $a : b = 1 : 1$ و مساويا للاختلاف المركزي المعلوم ثم نرمز a هـ موازيا للمستقيم c فيقطع الدليل في نقطة هـ

ثم نصل ب م ونقسمه في الداخل والخارج في نقطتي أ ٦ ب نسبة
ب : أ هـ فإذا رسمنا حينئذ دائرة قطرها أ أ وكانت ب نقطة على المحيط
فتكون نسبة ب ق الى ق م = ب أ الى أ م

ثم نفرض أن محيط الدائرة يقطع $م م$ في تقطعي $ع ك ع$ فتكون كل من $ع ك ع$ نقطة من نقط المنحنى

ثم نرسم $ع ل ك ع$ ل عمودين على الدليل

فحيث أن $ع$ واقعة على محيط الدائرة التي قطرها $ا ا$ يحدث

$$ب ع : ع م = ب ا : ا م = م ا : ا هـ$$

$$\therefore ب ع : ع م = ا ب : م ا هـ$$

لكن من تشابه المثلثين $ل ع م$ و $ا هـ م$ يكون

$$ع م : م ا هـ = ع ل : ا و$$

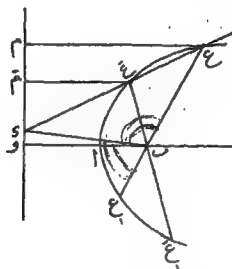
$$\text{وحينئذ يكون } ب ع : ا ب = ع ل : ا و$$

ومن ذلك يتضح أن نقطة $ع$ وكذلك $ع$ واقعتان على المنحنى

ويجب أن نلاحظ أنه في منحنى القطع الناقص ومنحنى القطع المكافئ تكون النقطتان $ا ك ا$ وكذلك النقطتان $ع ك ع$ واقعتين في جهة واحدة من $م$ أى في جهة واحدة من الدليل وفي منحنى القطع الزائد تكون النقطتان $ع ك ع$ في جهة واحدة من الدليل إذا كان $ب ا$ أصغر من $ا هـ$ وفي جهتين مختلفتين منه إذا كان $ب ا$ أكبر من $ا هـ$ ومع أن $ب ا < ا و$ لا يستنتج من ذلك أن $ب ا < ا هـ$

ويجب أن يلاحظ أيضاً أنه إذا تغير اتجاه الوتر بحيث يقرب $ا هـ$ من التساوى بخط $ا$ شيئاً فشيئاً فإن البعد $ا ب$ يأخذ في الازدياد بلا حدة وكذلك البعد $م ع$. فإذا تحول اتجاه الوتر إلى أن صار $ا هـ = ب ا$ تكون إحدى نقط تقاطع $م م$ بالمنحنى على بعد لانهاى من الدليل

١٠ - النظرية السادسة. - اذا قطع مستقيم منحنيًا بوترته ب
في نقطتي ع و ع' وقطع الدليل في نقطة د يكون ب د متساوي الميل على
كل من ب ع ب' ع'



وللبرهنة على ذلك فصل ب ع ب' ع' ب' و نرسم ب ع ب' ع' م
عمودين على الدليل ثم نمد كلا من ب ع ب' ع' ب' على استقامته ليقطع
المنحني في نقطتين أخريين مثل ع' ب' ع' ب' على التناظر فبمقتضى التعريف يحدث

$$ب ع : ب' ع' = ب ع : ب' ع'$$

$$\therefore ب ع : ب' ع' = ب ع : ب' ع'$$

لكن من تشابه المثلثين م ع ب' و م ع ب' يحدث

$$ب ع : ب' ع' = ب ع : ب' ع'$$

$$\text{وحينئذ يكون } ب ع : ب' ع' = ب ع : ب' ع'$$

ومنه ينتج أن ب د منصف للزاوية ع ب د بشرط أن تقطعي ب ع ب'
يكونان في جهة واحدة من د وينتج أيضاً أن ب د منصف للزاوية ع ب د
بشرط أن يكون ب ع ب' في جهتين متقابلتين بالنسبة للدليل ولا تتوفر الحالة
الآخيرة الا اذا كان المنحني قطعاً زائداً

نتيجة ١ — الخط المستقيم لا يقطع المنحنى الا في نقطتين
 لاننا لو فرضنا أن $د ع ع$ مستقيم فبما ان النقط $ع ك ع$ واقعـ
 ة على المنحنى $د ب$ فيلزم أن يصنع المستقيم زوايا متساوية مع $ب ع$
 $ك ع$ وهذا مستحيل

نتيجة ٢ — اذا فرض أن $ب ع ك ع$ وتراف بورى ان
 لمنحن فان المستقيمين $ع ك ع$ يتقابلان على الدليل وكذلك $ع ك ع$
 $ك ع$ يتقابلان على الدليل

وبرهان ذلك أنه اذا فرض أن المستقيم $ع ك ع$ يقطع الدليل في نقطة $د$
 فيكون $د ب$ منصفـا للزاوية $ب ع ك$ كما تقدم اثباته ويكون المستقيم الواصل
 بين نقطة $ب$ ونقطة تقاطع $ع ك ع$ مع الدليل منصفـا أيضا للزاوية $ب ع ك$
 ومنه يستنتج أن $ع ك ع$ يلزم أن يقطعا الدليل في نقطة واحدة
 وكذلك يتقاطع المستقيمان $ع ك ع$ مع الدليل في نقطة مثل $د$
 بحيث يكون $د ب$ منصفـا للزاوية $ب ع ك$

ويتضح من ذلك أن المستقيمين $د ب$ و $د ك$ متعامدان

(مسألة ١) اذا علمت بورة منحـن وعلمت نقطتان من محيطه فاثبت
 أن الدليل يلزم ان يمر باحدى نقطتين ثابتتين

(مسألة ٢) المطلوب ايجاد الدليل لمنحن معلوم بورة من بورة وثلاث
 نقط على المنحنى وأثبت أن ثلاثة منحنيات على الأقل من الأربعة المنحنيات
 التى توفى هذا الشرط يلزم أن تكون قطاعات زائدة

(مسألة ٣) المطلوب ايجاد الدليل لمنحن معلوم بورته واتجاه المحور القاطع
 ونقطتان على المنحنى

(مسألة ٤) لو فرضنا $ع ك ع$ نهايتى وتر بورى لمنحن $ك د$ نقطة
 أخرى على المنحنى وأن $د ك ع$ يقطعان الدليل المطابق في نقطتي

د ٦ ع على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن د ٦ يقابل زاوية قائمة رأسها بورة المنحنى

(مسألة ٥) مفروض أن ع ب ع وتر بوري لمنحن وأن ١ نقطة الرأس لهذا المنحنى وأن ع ١ ٦ ع ١ يقطعان الدليل المناظر في نقطتي د ٦ ع على التناظر والمطلوب البرهنة على أن د ٦ = د ٦

مع فرض و موقع الدليل

(مسألة ٦) لو فرضنا ع نقطة تما على منحن بورته ب ١ ٦ نقطة رأس المنحنى وأن ع ١ يقطع الدليل المناظر في نقطة د ثم رسمنا د ٦ موازيا للحدود القاطع ليقطع امتداد ع ب في د فانه يطلب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة د هو منحنى قطع مكافئ

(مسألة ٧) المطلوب إيجاد بورة منحن معلوم منه الدليل ونقطة الرأس ونقطة أخرى على المنحنى

(مسألة ٨) المطلوب إيجاد الدليل لمنحن معلوم منه البورة ونقطة الرأس ونقطة أخرى على المنحنى

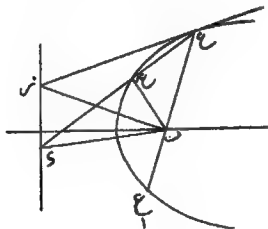
(مسألة ٩) لو فرضنا ان ع ٦ ع نهايتا وتر مركزي لمنحن بورته نقطة ب فاثبت أن ع ب ع + ب ع ثابت

(مسألة ١٠) لو فرضنا أن منحنين لهما دليل مشترك فانه يطلب البرهنة على أن نقط تقاطعهما يلزم أن تكون واقعة على محيط دائرة مركزها واقع على المستقيم الواصل بين بورتيهما

١١ — تعاريف — اذا فرضنا مستقيما مارا بنقطتين متجاورتين ع ٦ ع من منحن وان نقطة ع تتحرك على المنحنى وتقرب من نقطة ع الثابتة شيئا فشيئا بحيث يكون المستقيم مارا بالنقطتين دائما فالوضع النهائي

١٢ - النظرية السابعة - الجزء من مماس المنحنى المحصورين نقطة التماس والدليل يقابل زاوية قائمة رأسها البؤرة المناظرة للدليل

ثم نفرض أن نقطة ع تحرك في جهة ع حتى تنطبق عليها ونفرض أن ع ز هو الوضع النهائي للمستقيم ع ع أعني الوضع النهائي للماس في ع فيحدث أن ب يصنع دائماً زاويتين متساويتين مع ع ب ك ع

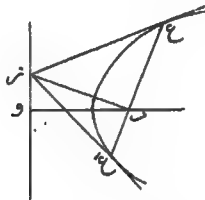


وحينئذ إذا تحركت نقطة ع في جهة ع وانطبقت عليها وتحركت نقطة د حتى تصل الى نقطة ن فإن المستقيم ب ن يصنع زاويتين متساويتين مع ع ب ك و ب ن ع وبناء عليه تكون كل من الزاويتين ن ب ع و ك ن ب ع قائمة

وإذا فالمستقيم ن ع يقابل زاوية قائمة رأسها نقطة ب وبالعكس إذا رسمنا ن ع عمودا على ب ع ليقطع الدليل في نقطة ن يكون ن ع هو المماس في نقطة ع

١٣ — النظرية الثامنة — المماسان في نهايتي وتر بوري لقطاع مخروطي يتقاطعان على الدليل المناظر للبورة

للبهنة على ذلك نفرض ع ب ع أي وتر بوري لمنحن بورته ب ثم نرسم ب ن عموديا على ع ب ع فيقطع الدليل المناظر للبورة ب في نقطة ن بحيث ان كلا من الزاوية ن ب ع و ك الزاوية ن ب ع قائمة فيكون كل من ن ع و ك مماسا للمنحنى



فيتضح اذن أن المماسين في نقطتي ع و ك يتقاطعان على الدليل وبالعكس إذا رسم مماسان لمنحن من نقطة على الدليل فإن المستقيم الواصل بين نقطتي التماس يمر بالبورة المناظرة للدليل

[نفرض أن ϵ م ϵ م ϵ م عمودان على الدليل فتكون القطع م ϵ م ϵ م ϵ م واقعة على محيط دائرة وحينئذ تكون زاوية ب ن ا ϵ م ϵ م زاوية م ن ا ϵ م على حسب ما اذا كان ب ϵ م ϵ م ϵ م

وذلك تكون الزاوية ب ن ا ϵ م ϵ م الزاوية م ن ا ϵ م على حسب ما اذا كان ب ϵ م ϵ م ϵ م

وحينئذ تكون الزاوية ع ن ا ϵ م ϵ م زاوية قائمة على حسب ما اذا كان ب ϵ م ϵ م ϵ م [(وفي حالة القطع الزائد يشترط أن تكون القطعتان ع ϵ م ϵ م واقعتين في جهة واحدة من الدليل)

تعريف — الوتر البورى لأى منحرف العمودى على المحور القاطع يسمى (بالوتر البورى العمودى)

ويتضح مما تقدم أن المماسين المرسومين من نهايتى الوتر البورى العمودى يتقاطعان فى نقطة و

١٤ — النظرية التاسعة — اذا رسم ب م عمودا على الدليل من نقطة مثل نقطة ب وفرضنا ب البورة المناظرة لهذا الدليل يكون ب م : ب م أكبر من الاختلاف المركزى اذا كانت النقطة المفروضة خارجة عن المنحنى ويكون أصغر منه اذا كانت فى داخل المنحنى

وتكون أى نقطة مفروضة كنقطة ب خارجة عن المنحنى اذا كان المستقيم ب م قاطعا للمنحنى فى نقطة واحدة ليس الا بين ب م و

لنفرض ب نقطة خارجة عن المنحنى ونفرض أن ب م يقطع المنحنى فى نقطة ع ثم نرمس ع م عمودا على الدليل ونصل ب م فيقطع ع م فى نقطة د الواقعة بين ع م و

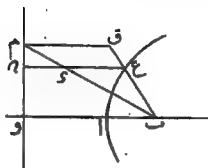
فحيث أن $د ع$ مواز للمستقيم $و م$ فيحدث

$$ب ق : ق م = ب ع : ع د$$

ولكن $ب ع : ع د < ب ع : ع ع$

$$\therefore ب ق : ق م < ب ع : ع ع$$

أى أكبر من الاختلاف المركزى للمنحنى



ولو فرضنا أن $ق م$ في جهتين متقابلتين بالنسبة للدليل وفرضنا أن $ب ق$ يقطع المنحنى في نقطتين مثل $ع م$ وأن نقطة $ع$ واقعة بين $ب م$ فيلصق من ذلك أننا إذا رسمنا $ع د$ عمودا على الدليل ومددنا $ب م$ على استقامته فإن $ب م$ يقطع $ع د$ في نقطة $د$ (بين $ع م$ و $د$) ومنه يستلج كما تقدم أن

$$ب ق : ق م < ب ع : ع د$$

ويمكن البرهنة بمثل هذه الطريقة على أنه اذا كانت نقطة $ق$ واقعة داخل المنحنى يكون $ب ق : ق م$ أصغر من الاختلاف المركزى للمنحنى

١٥ — النظرية العاشرة — اذا فرضنا $ط$ نقطة ما على مماس للمنحنى

في نقطة $ع$ ورسمنا $ه ط$ عمودا على الدليل $م ط$ و $د$ عمودا على البعد البورى $ب ع$ تكون النسبة $ب د : ط ه$ مساوية للاختلاف المركزى

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

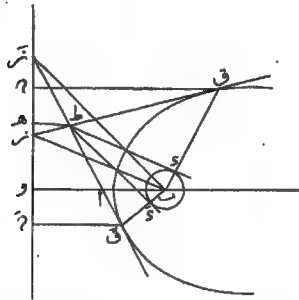
ثم نرسم Γ Γ Γ موازيين للمستقيمين Γ Γ Γ في Γ Γ Γ على التناظر

فحيث ان n مواز للمستقيم $ط$ و فيحدث

∴ ب ق : ق ق = د ب : د ط هـ

ويتضح اذن أن نقطة ق واقعة على المنحنى وحيث ان الزاوية ن ب ق قائمة فيكون ن ط ق هو المماس المرسوم في نقطة ق وكذلك يكون ن ط ق هو المماس في نقطة ق

١٧ — النظرية الثانية عشرة — المطلوب البرهنة على أن المماسين لمنحن المرسومين من نقطة خارجة عنه يقابلان زاويتين متساويتين أو متكاملتين رأساهما إحدى البورتين



نفرض ان ط ق ك ط ق هما المماسان ونفرض أن ط ق ك ط ق أو امتدادهما يقطعان الدليل في نقطتي ن ك ن على التناظر ثم نرسم ط هـ عمودا على الدليل ونرسم ط د ك ط د عمودين على ك ق ك ق على التناظر

وبمقتضى النظرية الحادية عشرة يحدث

$$ب د : ط هـ = ب ا : ا و$$

$$= ب د : ط هـ$$

واذن يكون $ب د = ب د$

وينتج من ذلك أن ط واقعة على المنصف الداخلى للزاوية د ب د واذن تكون واقعة على المنصف الداخلى أو المنصف الخارجى للزاوية ك ب ق

وإذا فرض أن $ق ك$ في جهة واحدة من الدليل وإن نقطة $ط$ واقعة في نفس هذه الجهة فواضح أن $ب ز ك$ تكون في الجهة بعينها وكذلك $ب ز ك$ وإذا كان $ق ك$ وإذا كان $ط ب$ في هذه الحالة منصفاً للزاوية $ق ب ق$

وكذلك إذا فرض أن $ق ك$ في جهة واحدة من الدليل وإن $ط$ في الجهة المقابلة لها يكون $ب ز ك$ في جهتين متقابلتين ويكون $ب ز ك$ في جهتين متقابلتين أيضاً . وحينئذ يكون المستقيم $ط ب$ في هذه الحالة منصفاً للزاوية $ق ب ق$ ولو فرضنا أن $ق ك$ في جهتين متقابلتين من الدليل يكون $ب ز ك$ في جهة واحدة أو في جهتين متقابلتين على حسب ما إذا كان $ب ز ك$ في جهتين متقابلتين أو في جهة واحدة وحينئذ في هذه الحالة أى عند ما تكون النقطتان $ق ك$ واقعيتين على فرعين مختلفين من القطع الزائد يكون المستقيم $ط ب$ منصفاً للزاوية الخارجة $ق ب ق$

وإذا كان لو فرضنا $ط ق ك$ مماسين لمنحنى بورته نقطة $ب$ يكون $ط ب$ منصفاً للزاوية $ق ب ق$ ما لم يكن المنحنى قطعاً زائداً ونقطتان $ق ك$ واقعيتين على فرعين مختلفين منه والا كان $ط ب$ منصفاً للزاوية الخارجة $ق ب ق$

[يجب على الطالب أن يرسم أشكالاً توضح الأحوال المختلفة]

نتيجة — إذا كان المماسات في نقطتين من نقط المنحنى مثل $ق ك$ متقاطعين في نقطة $ط$ وقطع الوتر $ق ك$ دليلاً في نقطة $ز$ فإن المستقيم $ز ط$ يقابل زاوية قائمة رأسها في البورة المناظرة لهذا الدليل وللبرهنة على ذلك نقول أنه يؤخذ مما تقدم أن $ط ب$ منصف للزاوية $ق ب ق$ الداخلة أو الخارجة على حسب ما إذا كانت النقطتان $ق ك$ في جهة واحدة أو في جهتين متقابلتين من الدليل

وحيث أن المستقيمان b و a متعامدان في كل الأحوال

(مسألة ٢) اذا علمت بورة المنحني وعلمت نقطتان منه والمماس

(مسألة ٣) اذا علم الدليل لمنحن ونقطتان منه والمماس في احدى هاتين

(مسألة ٤) ارسم منحنيًا معلوماً منه البؤرة والاختلاف المركزي والمماس

(مسألة ٥) المطلوب إيجاد بورة منحى معلوم منه الدليل والاختلاف

(مسألة ٦) لو فرضنا أن $E \subseteq$ عمود على المحور القاطع لمنحن من أى

نقطة على هذا المنحنى ومددنا ϵ على استقامته ليقطع المماس المرسوم من

نهاية وتربوري عمودي في نقطة s فأثبت أن $s = b = c$

١٨ - النظرية الثالثة عشرة - المحل الهندسي للنقط المنصفة بجملة

اوتار متوازية في منحن هو مستقيم مار بمركز المنحنى

لتفرض q - q أحد الاوتار الموازية q ف النقطة المنصفة له ثم نرمس

ق م ق م ف ف أعمدة على الدليل ونرسم ق ل ق ل عمودين

عليه ف

$$b^2 - b^2 = y^2 - y^2$$

$$(y + q)(y - q) =$$

$\text{ف. ف. ف.} =$

[لانی ق + ق = ۲ ف ق ۶ ی ق - ق = ۲ ی ف]

$$= \text{ول ف ف و}$$

لانق ۛ ل ۛ ی ۛ واقعة على محيط دائرة

وكذلك اذا رمزنا للاختلاف المركزي لهذا المنحنى بحرف هـ يحدث

$$\overline{2J} \cdot \overline{2H} = \overline{2M} \cdot \overline{2H} = \overline{2C}$$

$$6. \quad \overline{15}^1 \cdot \overline{1}^1 = \overline{15}^2 \cdot \overline{1}^2 = \overline{15}^3$$

ولكن بمقتضى البند الرابع يحدث $\gamma = \text{هـ}^2$ ، و بفرض أن γ مركز المنحنى
وحيث أن يكون γ خطاً مستقيماً

ولكن من نقطة ثابتة لكل الأوتار الموازية للوتر o - وجنثذ تكون كل النقط المنصفة لجميع أوتار المصحى المتوازية واقعة على المستقيم الثابت الواصل بين المركز ونقطة تقاطع الدليل بالعمود النازل من البورة على الأوتار

تعريف - المحل الهندسي للنقط المنصفة لجملة أوتار متوازية في منحني يسمى (قطرا)

[واضح مما تقدم أن كل أقطار المنحنى عبارة عن مستقيمت مارة بالمركز وحيدته فأقطار القلع المكافئ مستقيمت تقطع المحور على بعد لانهائي من البؤرة وإذاً فهي موازية للحدود ويمكن الحصول على هذه النتيجة أيضاً إذا فرضنا أن $هـ = ١$ في الارتباط الآتي $ف = ٥ = ٢$ ف ٥ لانه إذا كان $ف = ٥$ ف ٥ يلزم أن تكون القطعتان ٥ ٦ متطابقتين]

نتيجة ١ - إذا فرض أن أحد أقطار المنحنى يقطع المحيط في نقطة كنقطة ع فيكون المماس في هذه النقطة موازيا للاوتار التي ينصفها هذا القطر لانه إذا فرض أن المستقيم المرسوم من نقطة ع موازيا للاوتار التي ينصفها القطر ح ع يقطع المنحنى في نقطة أخرى مثل نقطة ص تكون النقطة المنصفة للمستقيم ع ص واقعة على ح ع وحينئذ تكون في نقطة ع وذلك لا يتأتى الا بانطباق النقطتين ع ٦ ص

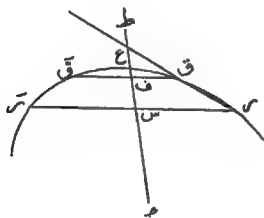
وواضح أن القطرين $1 \geq 6 \geq 2$ ينصفان الأوتار الموازية للمستقيمين $2 \geq 6 \geq 1$ على التناظر ويستنتج من ذلك إذن أن المماسين في نقطتي $1 \geq 6$ موازيان للمستقيم $2 \geq 6$ والمماسين في نقطتي $2 \geq 6$ موازيان للمستقيم $1 \geq 6$

وحيث ان القطر يقطع المنحنى ذا المركز في نقطتين فينتج أن المماسين في هذين النقطتين متوازيان

[ويستنتج ذلك مباشرة من ملاحظة أن مركز المنحنى هو النقطة المنصفة لكل الأوتار التي تمر به وذلك لأنه لو فرض أن ع ح ع ك س ح س وتران حيثما اتفق يكون ع س مساويا وموازيا للمستقيم ع س . وحيث لو تحركت نقطة س في جهة ع وتحركت تبعها نقطة س إلى ع يكون المماس في نقطة ع في النهاية موازيا للمماس في نقطة ع]

نتيجة ٢ — المماسان في نهايتي أى وتر من أوتار المنحنى يتقاطعان على القطر المنصف لهذا الوتر

لنفرض ق ق وترين متوازيين في منحنى ونفرض أن النقطتين المنصفتين لهما هما ف ك س فيكون س ح ف قطرا للمنحنى . ونفرض أن س ق يقطع س ح في نقطة ط



وحيث أن يحدث $س ح ط : ط ف = س س : س ح$

$\therefore س ح ط : ط ف = س س : س ح$

وحيث أن س ح مواز للمستقيم ق ف فيكون س ق خطا مستقيما وبناء عليه فالمستقيمان س ق ك س ق يتقاطعان على القطر المنصف للوتر ق ق وذلك صحيح لجميع أوضاع الوتر س س الموازي للوتر ق ق

ثم نفرض تحرك الوتر s الى جهة $ق$ حتى ينطبق عليه فيتحرك المستقيمان s و $ك$ حتى يصيرا في النهاية مماسين في نقطتي $ق$ و $ك$ على التناظر.

واذا فالمماسان في نقطتي $ق$ و $ك$ يتقاطعان على القطر المنصف للوتر $ق$ (مسألة ١) اذا علم قوس من منحن مرسوم على الورق فالمطلوب إيجاد مركز المنحنى بواسطة المسطرة والبرجل

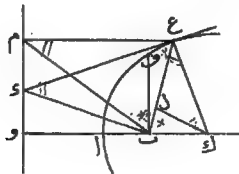
(مسألة ٢) أثبت أن المحور المار بالبورتين أكبر أقطار القطع الناقص وأن المحور المزاج أصغرها .

(مسألة ٣) أثبت أن المحور المار بالبورتين أطول وتر بوري في القطع الناقص وأن الوتر البورى العمودى على هذا المحور أقصرها

١٩ — النظرية الرابعة عشرة — اذا تقاطع عمودى المنحنى في نقطة $ع$ مع المحور القاطع في نقطة $ك$ فيكون $ب ك$: $ب ع$ مساويا للاختلاف المركزى لهذا المنحنى .

لنفرض أن المماس في نقطة $ع$ يقطع الدليل المناظر للبورة $ب$ في نقطة $د$ ثم نرسم $ع م$ عمودا على الدليل ونصل $ب م$

فحيث ان الزاويتين $د ب ع$ و $م ب ع$ قائمتان فتكون النقط $د$ و $ب$ و $ع$ واقعة على محيط دائرة



$=$ الزاوية المتممة للزاوية $\angle C = \angle D$

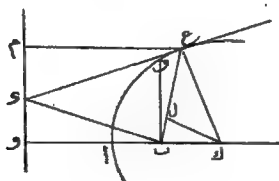
وحيث أن يكون المثلثان ب ع م 6 ك ب ع متشابهين ويحدث

$$ب ك : ف ع = ب ع : ع م = ا ب : ا و$$

٢٠ - النظرية الخامسة عشرة - إذا تقاطع عمودى المنحنى فى نقطة C مع المحور القاطع فى نقطة K يكون مسقط C على B مساويا لنصف الوتر البورى العمودى

للبرهنة على ذلك نرسم ك ل عمودا على ب ع ونرسم ب ف عمودا على ب و فيقطع المنحنى في نقطة ف وحينئذ يكون ب ف نصف الوتر البوري العمودي وعلينا أن نرهن على أن ع ل = ب ف

ويمكننا أن نثبت كما تقدم في النظرية الرابعة عشرة أن المثلثين ك ب ع
٢٤٦ م ع هـ متشابهان



وحيث أن يكون $ع ك : م ب = ع ب : م ع = ٢٤ : ٢٠ = ٦ : ٥$

ولكن حيث ان $دكع ل = دبم ع = د و ب م$

6 دك ل ع = د قائمة = د د و م

فيكون المثلثان كل ع 6 ب و م متشابهين

وعليه يحدث $ع:ل:ب:و = ع:ك:ب:م$

واذا $ع: ن = و = ب: ا$ و

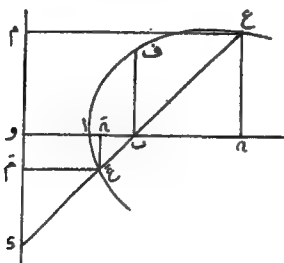
$$= \text{ب ف ب} =$$

فيكون $e_l = b = f =$ نصف الوتر البوري العمودي

٢١ - النظرية السادسة عشرة - نصف الوتر البورى العمودى

وسط توافق بین جزئی آی و تربوری

لنفرض أن ع ب ع' أي وتر بوري في منحرف ونفرض أنه هو أو امتداده يقطع الدليل المناظر في نقطة د ونفرض أن ب ف هو نصف الوتر البوري العمودي ثم نرمس ع م ع' م' عمودين على الدليل ونرمس ع د ع' د' عمودين على المحور القاطع



فحيث ان المثلثين ع ب د و ع ب د متشابهان فيحدث

$$ب ع : ب د = د ب : د ع$$

$$ع م - ب د : ب د - ع م =$$

$$ولكن ب ع = د ه . ع م = م ف = ه د و$$

$$ب ع = د ه . ع م = م ف$$

$$\therefore ب ع - د ف = ه (ع م - ب د)$$

$$ب د - ب ع = ه (ب د - ع م)$$

$$\therefore ع م - ب د : ب د - ع م = ب د - ب ع : ب د - ب ع$$

$$\therefore ب ع : ب د = ب د - ب ع : ب د - ب ع$$

فانضح من ذلك أن ب ع و ب د و م ف تكون متوالية توافقية

دائرة الاختلاف المركزى

٢٢ - تعريف - الدائرة التى مركزها نقطة ما فى مستوى منحني

والتي نسبة نصف قطرها الى طول العمود النازل من المركز على الدليل مساوية للاختلاف المركزى للنحنى تسمى (دائرة الاختلاف المركزى) لهذه النقطة

٢٣ - يمكن بواسطة دائرة الاختلاف المركزى ايجاد نقط تقاطع أى

مستقيم معلوم مع منحني معلوم بورته ودليله واختلافه المركزى

لنفرض أن المستقيم يقطع الدليل فى نقطة م ثم نرسم دائرة الاختلاف المركزى لنقطة ما على المستقيم مثل نقطة ك ونصل ب م فيقطع محيط الدائرة فى ع و ه ثم نصل ك ع و ك ه ونرسم ب ع و ب ه موازيين

لنقطة ك وليكن المماس م ط ثم وصلنا ب م ليقطع محيط الدائرة في نقطتي
 ب و ك فإنه يحدث ما يأتي كما تقدم

$$و ك . و ك : ب ب = ب ب : م ط = م ط : م ط$$

ولكن قد تبين مما تقدم أن النسبة ك م : م ط ثابتة إذا كان الوتر
 ك و موازيا لمستقيم ثابت آخر

وكذلك يحدث أن ب ع . ب ع = ب ب . ب ب ومنه يستنتج أن
 النسبة ع ك . ع ك : و ك . و ك ثابتة لجميع أوضاع نقطة ك بشرط
 أن يكون كل من الوترين موازيا لمستقيم ثابت

مسائل

(١) إذا علمت بورة منحن ودليله ورسم مماسان للمنحنى من نقطة معلومة
 فالمطلوب البرهنة على أن وتر المماس يمر بنقطة ثابتة

(٢) إذا فرض أن ب ع ب ع وتر بوري لمنحن و ك نقطة أخرى
 على هذا المنحنى ووصلنا ع و ك ليقطعا الدليل المناظر للبورة ب
 في نقطتي و ك و على التناظر فإنه يطلب البرهنة على أن المستطيل و و .
 و و ثابت

(٣) إذا فرض أن المماس لمنحن بورته ب في نقطة ع يقطع المحور القاطع
 في نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن ب ط أكبر أو مساو أو أصغر من ب ع
 على حسب ما إذا كان المنحنى قطعاً ناقصاً أو قطعاً مكافئاً أو قطعاً زائداً

(٤) إذا فرض أن ع ب و وتر بوري في منحن وكانت نقطة ط هي
 نقطة تقاطع المماس في نقطة ع بالمستقيم المرسوم من و عموداً على ع و
 فالمطلوب البرهنة على أن الدليل منتصف للمستقيم ط و

(٥) اذا فرض أن $ع ب ع$ وتر بوري في منحن وفرض أن هذا الوتر أو امتداده يقطع الدليل في نقطة $د$ فالمطلوب البرهنة على أن $د ب$ وسط توافقي بين $ع د$ و $ك ع$ و

(٦) اذا فرض أن $و د$ وتر لمنحن ويقطع الدليل في نقطة $ز$ ويقطع وتر التماس للماسين المرسومين للمنحنى من نقطة $ز$ في نقطة $د$ فالمطلوب البرهنة على أن $ز و د$ و $ك ز$ و $د$ تكون متوالية توافقية

(٧) اذا علمت بورتا منحن ذى مركز وعلم الخط الواصل بين نقطتي التماس للماسين المرسومين لهذا المنحنى من نقطة معلومة فالمطلوب ايجاد الدليلين

(٨) اذا علمت بورة المنحنى ودليله والاختلاف المركزى فالمطلوب رسم مماس له مواز لمستقيم معلوم

(٩) مفروض أن العمودى في نقطة $ع$ لمنحن بورته $ب$ يقطع المحور القاطع في نقطة $ح$ ورسم $ع م$ عمودا على الدليل المناظر للبورة $ب$ والمطلوب البرهنة على أن $م ب ك ع ح$ يتقاطعان على مستقيم ثابت مهما كان وضع نقطة $ع$ على المنحنى

(١٠) اذا رسم مماس لمنحن في نقطة منه ومددنا الوتر البورى العمودى على استقامته ليقطع التماس ومددنا التماس ليقطع الدليل فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين بعدى نقطتي التقاطع عن البورة مساوية للاختلاف المركزى

(١١) اذا رسم مماسا لمنحن في نهايتى أى وتر بورى ومددنا الوتر البورى العمودى على استقامته ليقطعهما في نقطتين فالمطلوب البرهنة على أن نقطتي التقاطع متساويتا البعد عن البورة

(١٢) إذا فرض أن u و v وترقا في منحنٍ مخروطي ويقابل زاوية معلومة رأسها البورة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة تقاطع المستقيمين اللذين يمسان المنحنى في النقطتين البادى ذكرهما هو منحنٍ مخروطي آخرو أن المستقيم u و v يمس منحنيًا ثالثًا وأن المنحنيات الثلاثة لها بورة مشتركة ودليل مشترك أيضا

(١٣) معلوم وضع ضلعي مثلث ومعلوم أن الضلع الثالث يقابل زاوية ثابتة رأسها نقطة ثابتة والمطلوب البرهنة على أن الضلع الثالث دائماً يمس منحنيًا بورته النقطة الثابتة المذكورة

(١٤) إذا رسمنا مماسًا لمنحنٍ وأخذنا عليه نقطتي z و 6 بحيث أن z و 6 يقابل زاوية قائمة رأسها بورة المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المماسين الآخرين المرسومين من نقطتي z و 6 يتقاطعان على الدليل المناظر للبورة المذكورة

(١٥) إذا فرض أن مماسًا لمنحنٍ بورته $ب$ في نقطة $ع$ يقطع الدليل في نقطة $د$ ويقطع المحور القاطع في نقطة $ط$ ورسمنا $ع م$ عمودًا على الدليل من نقطة $ع$ فالمطلوب البرهنة على أن $ب م$ مماس للدائرة $ب د ط$

(١٦) إذا فرض أن $ب ي$ عمود على مماس لمنحنٍ بورته $ب$ في نقطة $ع$ وفرض أن $ع م$ عمود على الدليل المناظر لهذه البورة فالمطلوب البرهنة على أن المثلثين $ب ي و$ و $ب ع م$ متشابهان

(١٧) إذا رسم مماسًا لمنحنٍ في نهايتي الوتر البورى $ع ب$ و $ع$ وفرض أنهما يتقاطعان في نقطة $ط$ وفرض أن نقطتي $ع$ و $ك$ في جهتين متقابلتين

من ب فالمطلوب البرهنة على ب ط^٢ \geq ع ب . ب ع على حسب ما اذا كان المنحنى قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً

(١٨) اذا فرض أن ع ب ع وتربوري في منحن وفرض أن العمودين في نقطتي ع ٦ ع يتقابلان في نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من نقطة ك موازياً للحدود القاطع منتصف للمستقيم ع ع

(١٩) اذا فرض أن ع ب ع وتربوري لمنحن وفرض أن العمودين في نقطتي ع ٦ ع يتقابلان في نقطة ك ثم رسم ك د عموداً على ع ب ع من نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن ع ب ع = ع د ع = ع د

(٢٠) اذا فرض أن عمودى منحن في نقطتي ع ٦ ع يقطعان المحور القاطع في ك ٦ ك على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن مسقطي ع ك ٦ ع ك على ع ع متساويان

الفصل الثاني

القطع المكافئ

٢٥ — تعاريف : (القطع المكافئ) هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك في مستوي يشتمل على نقطة معلومة ومستقيم معلوم بحيث يكون بعدها عن النقطة المعلومة مساويا على الدوام لبعدها العمودى عن المستقيم المعلوم. والنقطة المعلومة تسمى (بورة القطع المكافئ) والمستقيم المعلوم يسمى (الدليل) النظرية الأولى — كيفية ايجاد جملة نقط على منحنى قطع مكافئ معلوم بورته ودليله

نفرض ب بورة القطع المكافئ م م الدليل

ثم نرسل من ب المستقيم و ب عمودا على الدليل فيقطع الدليل فى نقطة و
ثم ننصف و ب فى نقطة أ بحيث ان $ا ب = ا و$ فتكون نقطة ا واقعة على المنحنى

ثم نأخذ أى نقطة على و ب مثل نقطة د ونرسم منها ل د عمودا على و ب د

ثم نرسم فى نقطة ب ونرسم دائرة نصف قطرها يساوى و د فيقطع محيطها المستقيم ل د فى نقطتي ع ك ع

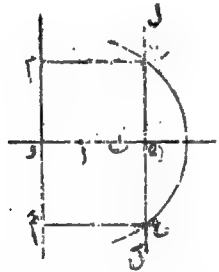
ثم نرسم ع م ك ع م عمودين على الدليل

فحيث ان ع م ك ع م د و ك ع م كلها عمودية على م و م وعلى ع د ع فيحدث

$$ع ب = و د = ع م ك ع ب ك ع = و د = ع م = ع$$

وحينئذ تكون ع ك ع نقطتين من نقط المنحنى

والشرط اللازم والكافي لتقاطع الدائرة التي مركزها ب ونصف قطرها د بالمستقيم د ل هو أن يكون د أكبر من ب د ويحصل هذا اذا أخذنا نقطة د في أى وضع في الشكل على يمين ا وحينئذ أى مستقيم مواز لدليل القطع المكافئ وواقع في الجهة التي بها البورة بالنسبة للدليل يقطع المنحنى في نقطتين بشرط أن لا يكون بعد المستقيم عن الدليل أصغر من نصف بعد البورة عن الدليل



وبناء عليه فالقطع المكافئ واقع كله في الجهة التي بها البورة بالنسبة للدليل ويمتد الى بعد غير محدود

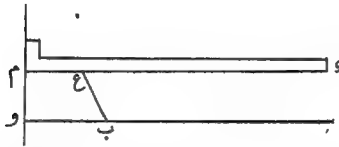
وحيث ان $ب ع = ب ع$ و ب د عمود على ع ع فلا بد أن يكون ع د مساويا للمستقيم د ع ويقال للمنحنى (مقابل) بالنسبة لمستقيم معلوم اذا كانت كل نقطة من نقط المنحنى تناظرها نقطة أخرى منه بحيث يكون الوتر الواصل بين النقطتين عمودا على المستقيم المفروض ومنصفا به والمستقيم المفروض يسمى (محور) المنحنى

والآن قد أثبتنا أن منحنى القطع المكافئ متماثل بالنسبة للعمود النازل من البورة على الدليل ولذا سمي هذا الخط (محور المنحنى)

ونقطة تقاطع المحور بالمنحنى تسمى (رأساً)

[فرأس القطع المكافئ في الشكل المرسوم أعلاه هي نقطة أ]

٢٦ — قد بينا كيفية إيجاد عمدة نقط على المنحنى ويمكن رسم المنحنى بالاستمرار بالكيفية الآتية



توضع لذلك المسطرة م س على الدليل بحيث يكون جانبها الطويل عموداً عليه والجانب الصغير منطبقاً عليه كما في الشكل ثم يؤخذ خيط طوله مساو لطول الضلع الطويل ويثبت طرفه في نهاية المسطرة والطرف الآخر في البورة وتزلق بعد ذلك المسطرة بطول الدليل ويحرك قلم الرصاص بجانب المسطرة بحيث يكون شاذاً للخيط على الدوام فيرسم القلم قطعاً مكافئاً لبورته البورة المعلومة ودليله الدليل المعلوم وذلك واضح حيث أن $ب ع + ع س = م س$ فيكون $ب ع = م ع$

٢٧ — من الواضح أن ب ع أصغر من م ع لاى نقطة مثل ع داخل القطع المكافئ وأن ب ع أكبر من م ع لجميع النقاط الخارجة وذلك لأنه اذا فرضت ع داخل المنحنى ورسمنا م ع عموداً على الدليل

فانه يقطع المنحنى في نقطة مثل $ق$ بين $ع ٦$ فيكون $ب ق = ق م$ وحينئذ يكون $ع م = ب ق + ق ع$ ويكون $ب ق + ق ع$ أكبر من $ب ع$ وبمثل هذا البرهان يمكن اثبات القضية لنقطة خارجة عن المنحنى

(مسألة ١) اذا كان البعد البورى لنقطة على منحنى قطع مكافئ مساويا للبعد البورى لنقطة أخرى عليه فالمطلوب البرهنة على أن الخط الواصل بين النقطتين مواز للدليل وأن البعدين البوريين لهما متساويا الميل على المحور

(مسألة ٢) اذا علم الدليل لقطع مكافئ وعلمت نقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن البورة واقعة على محيط دائرة ثابتة

(مسألة ٣) المطلوب ايجاد بورة قطع مكافئ اذا علم الدليل وعلمت نقطتان على المنحنى وكما قطعاً مكافئاً يمكن رسمها ففى بهذه الشروط

(مسألة ٤) اذا علمت بورة قطع مكافئ ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن الدليل مماس لدائرة ثابتة

(مسألة ٥) المطلوب ايجاد الدليل لقطع مكافئ اذا علمت البورة وعلمت نقطتان على المنحنى وكما حلا لهذه المسألة

(مسألة ٦) المطلوب ايجاد الدليل لقطع مكافئ اذا علمت البورة واتجاه المحور ونقطة على المنحنى

(مسألة ٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة التى يمر محيطها بنقطة معلومة ويمس مستقيماً معلوماً هو منحنى قطع مكافئ

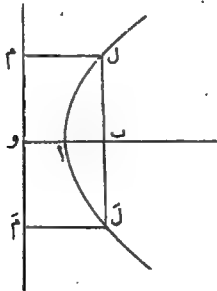
(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تمس مستقيماً معلوماً وتمس دائرة معلومة هو منحنى قطع مكافئ بوريته مركز الدائرة المعلومة ودليله مواز للمستقيم المعلوم ويبعد عنه بمسافة تساوى نصف قطر الدائرة المعلومة

٢٨ — تعاريف — العمود النازل على المحور من أى نقطة من نقط القطع المكافئ يسمى (الاحداثى الرأسى) لهذه النقطة وطول المحور من رأس المنحنى الى نقطة تقاطعه بالاحداثى الرأسى يسمى (الاحداثى الأفقى) لها
فى الشكل المرسوم فى بند ٢٥ ع د هو الاحداثى الرأسى لنقطة ع
١٦ د هو الاحداثى الأفقى لها

قد يسمى الوتر ع ع العمودى على المحور ضعف الرأسى ويسمى كل وتر مار بالبورة وترا بوريا
فاذا كانت الزاوية بين الوتر البورى والمحور قائمة يسمى بالوتر البورى العمودى

٢٩ — النظرية الثانية — طول الوتر البورى العمودى للقطع المكافئ يساوى أربعة أمثال بعد البورة عن الرأس
[$ل ل = ٤ ا ب$]

لنفرض ب بورة المنحنى م م والدليل ٦ و ا ب المحور ٦ ل ل
الوتر البورى العمودى



ثم نرسم ل م ٦ ل م عمودين على الدليل فبمقتضى التعريف يحدث

$$ب ل = ل م = م و$$

$$٦ ب ل = ل م = م و$$

وحينئذ يكون ل ل = ل م = م و = م و

ويجب أن يلاحظ أن القطعين المكافئين اللذين وتراهما البوريان العموديان

متساويان هما متساويان لأنه حيث أن الوترين البوريين العموديين

متساويان يكون بعدا البوريتين عن الدليلين المناظرين لهما متساويين ويمكن

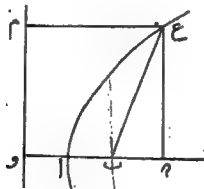
اذن تطبيق أحد المنحنيين على الآخر (كما جاء في اقليدس) بحيث ينطبق

الدليلان والبورتان حينئذ ينطبق المنحنيان على بعضهما تمام الانطباق

٣٠ — النظرية الثالثة — الاحداثى الرأسى لنقطة من نقط القطع

المكافئ وسط متناسب بين الاحداثى الأفقى والوتر البورى العمودى

$$[ع و = و ا ب ا و]$$



للبهنة على ذلك نصل ب ع ثم نرسم ع م عمودا على الدليل ٦ ع و

عمودا على المحور

$$\frac{2}{20} = \frac{2}{20} = \frac{2}{20} \quad \text{فيث ان}$$

$$\frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \frac{2}{20} \quad 6$$

$$\frac{2}{20} - \frac{2}{20} = \frac{2}{20} \quad \therefore$$

$$(20 + 20) (20 - 20) =$$

$$20.20 =$$

$$\text{لأن } 20 = 20 - 20 \quad 20.20 = 20 + 20$$

ويستنتج من الارتباط $20.20 = 20$ أن مربع العمود النازل على المحور من أى نقطة من نقط القطع المكافئ يتغير بتغير العمود النازل على الخط المار برأس المنحنى موازيا للدليل

(وبالعكس) إذا تحركت نقطة في مستو بحيث أن مربع العمود النازل منها على أحد مستقيمين ثابتين ومتعامدين يتغير بتغير العمود النازل منها على المستقيم الآخر فإن هذه النقطة ترسم منحنى قطع مكافئ

(مسألة) إذا فرض أن 20 هو الاحداثى الرأسى لنقطة $ع$ الواقعة على منحنى قطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمتتصف $ع$ هو منحنى قطع مكافئ

لأنه إذا فرضت نقطة $ن$ منتصف المستقيم 20 يحدث

$20 = \frac{2}{20} = \frac{2}{20}$ $20.20 = 20$ وحينئذ فالمحل الهندسى لنقطة $ن$ هو منحنى قطع مكافئ رأسه نقطة $ا$ ومحوره $اب$ ووتره البورى العمودى مساو للمستقيم $ا ب$

(مسألة ١) اذا كان الاحداثى الرأسى والاحداثى الأفقى لنقطة على منحنى قطع مكافئ متساويين يكون كل منهما مساويا للوتر البورى العمودى

(مسألة ٢) المطلوب ايجاد الاحداثى الأفقى المناظر لضعف الرأسى الذى طوله ثلاثة أمثال الوتر البورى العمودى

(مسألة ٣) اذا فرض أن $ع د$ ضعف رأسى لقطع مكافئ رأسه نقطة $ا$ وفرض أن محيط الدائرة $ا ع د$ يقطع المحور فى نقطة $و$ فالمطلوب البرهنة على أن $د و$ يساوى الوتر البورى العمودى

(مسألة ٤) اذا فرض أن $ع م$ عمود نازل على الدليل من نقطة على المنحنى مثل نقطة $ع$ وأخذت نقطة $و$ على $ع م$ بحيث يكون $ع و$ ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة $و$ هو منحنى قطع مكافئ مساو للمنحنى الأول

(مسألة ٥) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة التى تقسم الاحداثى الرأسى لمنحنى قطع مكافئ بنسبة ثابتة هو منحنى قطع مكافئ آخر رأسه ومحوره رأس الأول ومحوره

(مسألة ٦) اذا فرضت $ا$ رأس قطع مكافئ $٦ ع$ نقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنتصفة للمستقيم $ا ع$ هو منحنى قطع مكافئ آخر

(مسألة ٧) اذا فرض أن $ب$ بؤرة قطع مكافئ $٦ ع$ نقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنتصفة للمستقيم $ب ع$ هو منحنى قطع مكافئ بؤرته نقطة $ب$ ودليله فى منتصف المسافة بين $ب$ ودليل القطع المكافئ المعلوم

(مسألة ٨) اذا فرض أن ب بورة قطع مكافئ ك ع نقطة على المنحنى ك و نقطة على ب ع بحيث يكون ب و : ب ع مساويا للنسبة معلومة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة و هو منحنى قطع مكافئ

(مسألة ٩) اذا فرضت ع نقطة ما على منحنى قطع مكافئ وانزل ع م عمودا على الدليل ثم مددنا م ع على استقامته الى نقطة و بحيث يكون م ع = ع و و وفرض أن ك و موقعا الاحداثيين الرأسيين لنقطتي ع ك و على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ب و = ١ ٢ و وان المحل الهندسى لنقطة و هو منحنى قطع مكافئ رأسه نقطة ب

(مسألة ١٠) اذا فرضت ع نقطة على منحنى قطع مكافئ وأزل ع م عمودا على الدليل فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة و المنصفه للمستقيم م ع هو منحنى قطع مكافئ رأسه في منتصفه المسافة بين و ك

٣١ — تعاريف — اذا فرض مستقيم يقطع منحنيًا في نقطتين مثل ع ك ع وتحركت نقطة ع على المنحنى في جهة ع بحيث يكون المستقيم مارا بالنقطتين دائما فان الوضع النهائي للمستقيم المذكور عند ما تصل ع الى نقطة ع وتنطبق عليها يسمى مماسا للمنحنى في نقطة ع والعمود المقام على المماس من نقطة التماس ع يسمى عمودى المنحنى في نقطة ع المذكورة

٣٢ — النظرية الرابعة — (١) اذا رسم مستقيم يقطع الدليل لقطع مكافئ بورته ب في نقطة د ويقطع المنحنى في نقطتي ع ك ع يكون د ب منصفًا للزاوية الخارجة للزاوية الواقعة بين الضلعين ب ع ك ب ع

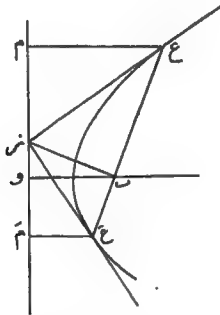
(٢) جزء المماس المحدد بنقطة التماس والدليل يقابل زاوية قائمة رأسها

بورة المنحنى

(وبالعكس) اذا رسمنا Γ عمودا على Γ ليقطع الدليل في نقطة Γ يكون Γ مماسا في نقطة Γ

٣٣ - النظرية الخامسة - المماسات للقطع المكافئ في نهايتي وتروري يتقابلان على الدليل ويكونان متعامدين

لنفرض Γ Γ وترابوريا لقطع مكافئ ثم نرسم Γ عمودا على Γ فيقطع الدليل في نقطة Γ



فحيث ان الزاويتين Γ Γ Γ قائمتان فيكون Γ مماسا في نقطة Γ

بمقتضى عكس النظرية الرابعة

[بمقتضى عكس النظرية الرابعة]

واذا فالمماسان في نهايتي الوتر البوري يتقاطعان على الدليل

ثم نرسم Γ Γ عمودين على الدليل

فحيث ان Γ Γ Γ قائمتان فتكون النقط Γ Γ Γ كلها واقعة على محيط دائرة وحيث ان Γ Γ Γ وتران متساويان في هذه

الدائرة فالزاويتان المقابلتان لهما $\angle \text{ب} \angle \text{د}$ $\angle \text{ا} \angle \text{ج}$ متساويتان وحينئذ يكون $\angle \text{د}$ منصفاً للزاوية $\angle \text{م}$

وكذلك يكون $\angle \text{ع}$ منصفاً للزاوية $\angle \text{م}$

وحينئذ يكون الخطان ع د ا ب متعامدين

(مسألة ١) اذا رسم ع م عموداً على الدليل لقطع مكافئ بورته نقطة ب ورأسه نقطة ا فالمطلوب البرهنة على أن م ب منصف للزاوية $\angle \text{ا ب ع}$

(مسألة ٢) اذا فرض أن ع ا يقطع الدليل في نقطة د فالمطلوب البرهنة على أن د ب منصف للزاوية الخارجة $\angle \text{ا ب ع}$

(مسألة ٣) اذا فرضت ع نقطة ما على منحنى قطع مكافئ وفرضت ا رأس ذلك المنحنى ورسمنا ع م عموداً على الدليل ووصلنا ع ا فقطع الدليل في نقطة د فالمطلوب البرهنة على أن م د يقابل زاوية قائمة رأسها بورة القطع المكافئ

(مسألة ٤) ع ب ع وتر بوري لقطع مكافئ ا ب د نقطة على المنحنى وفرض أن ع د ا ب يقطعان الدليل في نقطتي د ك على التناظر والمطلوب البرهنة على أن د ك يقابل زاوية قائمة رأسها البورة

(مسألة ٥) اذا فرض أن ع ب ع وتر بوري لقطع مكافئ وان ا رأسه وفرض أن ع ا يقطع الدليل في نقطة م فالمطلوب البرهنة على أن ع م مواز للحمور

(مسألة ٦) اذا كان لقطعين مكافئين دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين النقط المشتركة بينهما منصف للمستقيم الواصل بين البورتين وعمود عليه

(مسألة ٧) اذا فرض أن ثلاثة قطاعات مكافئة لها دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن الثلاثة الأوتار المشتركة بينها مأخوذة منى منى تتقاطع في مركز الدائرة المرسومة حول مثلث رؤوسه البور الثلاثة .

(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن المماسين للقطع المكافئ في نهايتي الوتر البورى العمودى يمران بموقع الدليل

(مسألة ٩) اذا فرض أن جملة قطاعات مكافئة لها دليل مشترك ومحور مشترك فالمطلوب اثبات أن كل هذه القطاعات تمس مستقيمين ثابتين متعامدين

(مسألة ١٠) اذا فرض أن جملة قطاعات مكافئة لها دليل واحد وتمس مستقيما معلوما فالمطلوب البرهنة على أن جميع هذه المنحنيات تمس مستقيما آخر عمودا على الأول وان بورها واقعة على مستقيم ثابت

(مسألة ١١) اذا فرض أن α و β هو الدليل لقطع مكافئ بورته γ فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين للزاويتين α و β مماسان للقطع المكافئ مع فرض أن γ نقطة قما على الدليل

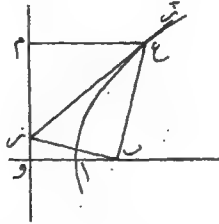
(مسألة ١٢) مفروض قطعتان مكافئتان بورتهما γ و δ ولهما دليل مشترك والمطلوب البرهنة على أن المماسين المشتركين بينهما يتقابلان في نقطة تقاطع γ بالدليل المشترك ويكونان متعامدين

(مسألة ١٣) المطلوب البرهنة على أن الدائرة التى قطرها أى وتر بورى في قطع مكافئ يمسهما الدليل

(مسألة ١٤) المطلوب إيجاد بورة القطع المكافئ اذا علم الدليل والمماس في نقطة معلومة .

(مسألة ١٥) المطلوب إيجاد بورة القطع المكافئ اذا علم الدليل ومماسان ومتى تكون هذه الشروط غير كافية .

٣٤ — النظرية السادسة — المماس للقطع المكافئ في نقطة منه مثل نقطة ع منتصف للزاوية الواقعة بين ب ع والمستقيم ع م العمود على الدليل



للبهنة على ذلك نمد المماس ليقطع الدليل في نقطة ن ثم نصل ب ن ونرسم ع م عمودا على الدليل
فثبت ان الزاويتين ن ب ع ن م ع قائمتان فتكون الأربع النقط
ن ب م ع واقعة على محيط دائرة . وحيث ان ب ع م ع م
وتران متساويان في هذه الدائرة فتكون

$$\angle ب ن ع = \angle م ن ع$$

وبناء عليه تكون الزاويتان المتممتان لهما متساويتين أيضا أي ان

$$\angle م ن ع = \angle د ن ع$$

فحينئذ يكون المستقيم ع ن منصف للزاوية ب ع م

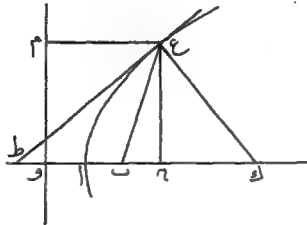
نتيجة ١ — المماس في نقطة ا منتصف للزاوية الواقعة بين ب ا و

وبناء عليه فالمماس في نقطة الرأس عمود على المحور

نتيجة ٢ — اذا مد ن ع على استقامته الى نقطة ن فالزاويتان

ب ع ن م ع ن متساويتان

٣٥ — النظرية السابعة — اذا فرض أن المماس لقطع مكافئ في نقطة ع يقطع المحور في نقطة ط وفرض أن ع د هو الاعدائي الرأسى لنقطة ع فيكون ب ع = ب ط ويكون ط ا = ا د



للبهنة على ذلك نصل ب ع ونرسم ع م عمودا على الدليل

فتكون ب ع د = ب ع ط

[بمقتضى النظرية السادسة]

∴ ب ع د = ب ع ط

[لأن ع م د ط متوازيان]

∴ ب ع = ب ط

وحيث أن ب ط = ع د = م د = و د

∴ ب ط + ا = و د + ا

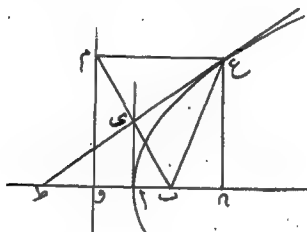
∴ ب ط + ا = و د + ا

تعريف — (تحت المماس) هو الجزء من المحور المحدود بين الاعدائي الرأسى لأى نقطة والمماس المناظر

وبناء عليه يكون تحت المماس دائما مساويا لضعف الاعدائي الافقى

وبناء عليه فتحت العمود في أى نقطة من نقط القطع المكافئ
مساو لنصف الوتر البورى العمودى

٣٧ - النظرية التاسعة - المحل الهندسى لموقع العمود النازل من بورة قطع مكافئ على المماس هو المماس للحنى فى نقطة الرأس وطول العمود وسط متناسب بين البعدين البورين لكل من نقطة التماس والرأس



فحيث ان $b = c$ و m والمماس في نقطة e منتصف للزاوية b c m
فلا بد أن يكون المماس عمودا على m ومنتصفا للمستقيم b في نقطة y
وحيث ان $b = y$ m $a = a$ و فلا بد أن يكون a y
موازيا للمستقيم m

فيتضح إذا أن النقطة y واقعة على المماس في نقطة الرأس

وحيث ان الزاويتين ب ي ط ٦ ا ب قائمتان فيكون المثلثان ا ب ي ٦ ا ب ط متشابهين .

$$\therefore \text{ا} : \text{ب} = \text{ب} : \text{ب} = \text{ب} : \text{ب} = \text{ب} : \text{ب}$$

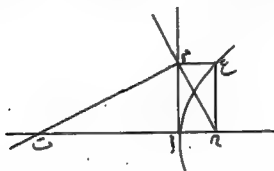
وَبِنَاءُ عَلَيْهِ يَكُونُ بِي = $\frac{2}{1}$ ا. ب. ع

عكس هذه النظرية له أهمية عظمى وهو

إذا تحرك مستقيم بحيث أن موقع العمودى عليه من نقطة ثابتة يكون دائماً

على مستقيم ثابت فالمستقيم المتحرك يكون دائماً مماساً للقطع المكافئ الذى

بؤرته النقطة الثابتة والمماس له في نقطة الرأس هو ذلك المستقيم الثابت



(مسألة) إذا رسمنا من نقطة ما على منحنى قطع مكافئ كنقطة ع المستقيمين ع د ع م عمودين على المحور وعلى التماس للمنحنى في نقطة الرأس فالمطلوب البرهنة على أن د م تماس لقطع مكافئ ثابت

للبرهنة على ذلك نرسم م ب عموداً على د م فيقطع المحور في نقطة ب
فحيث ان الزاويتين د م ب ١ ٢ قائمتان فنحدث

$$91 \times 12 = 12$$

ولكن $21 \times 14 = 28 = \frac{2}{12}$

وبناء عليه يكون $\bar{a} = a$ ، a وحينئذ تكون \bar{b} نقطة ثابتة.

ومن ذلك يتضح أن م د مماس لقطع مكافئ بوريته ب والمماس له في الرأس هو الخط أ م

مسائل على النظريتين السابعة والثامنة

- (١) المطلوب البرهنة على أن ط ب ع م معين
- (٢) المطلوب البرهنة على أن ط ع ك ب م منصفان لبعضهما ومتعامدان
- (٣) المطلوب البرهنة على أن م ع ك ب متوازي أضلاع
- (٤) إذا فرض أن ب ع ك مثلث متساوي الأضلاع فالمطلوب البرهنة على أن كل ضلع من أضلاعه مساويا للوتر البورى العمودى
- (٥) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ط م ب و ك متساويان
- (٦) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ط و م ب و ه متساويان
- (٧) المطلوب البرهنة على أن المثلثين م و ب ك و ه متساويان
- (٨) إذا فرض أن ب ع ك ل عمود على ب ع فالمطلوب البرهنة على أن

$$ع ل = ه ك = ١٢ ب$$
- (٩) المطلوب البرهنة على أن المماسين والعمودين فى نهايتى الوتر البورى العمودى تكون مربعا
- (١٠) إذا فرض أن و ه مواز للستقيم ب ع ويقطع ع م فى نقطة ه فالمطلوب البرهنة على أن ه مواز للستقيم ع ك
- (١١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للستقيم ع ك هو متحنى قطع مكافئ رأسه نقطة ب
- (١٢) إذا فرض أن عدة قطاعات مكافئة لها بورة مشتركة ومحور مشترك ثم رسمنا مماسات لها من نقطة واحدة على المحور المشترك فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على محيط دائرة

(١٣) إذا فرض أن المستقيم الواصل بين نقطة على منحني قطع مكافئ مثل نقطة ع ونقطة الرأس يقطع الدليل في نقطة د فالمطلوب البرهنة على أن د مواز للأس في نقطة ع

مسائل على النظرية التاسعة

(١) المطلوب البرهنة على أن أى مماس للقطع المكافئ يقطع الدليل وامتداد الوتر البورى العمودى في نقطتين متساويتى البعد من البورة

(٢) إذا وصلنا البورة ب لقطع مكافئ بنقطة على الدليل مثل نقطة م فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المنصف للمستقيم ب م عمودا عليه مماس للمنحنى

(٣) إذا رسمنا مماسات لجملة دوائر متحدة المركز في نقط تقاطع هذه الدوائر بمستقيم ثابت فالمطلوب البرهنة على أن كل هذه المماسات تمس قطعاً مكافئاً

(٤) المطلوب إيجاد الدليل لقطع مكافئ إذا علم مماسان له وعلمت البورة
(٥) إذا علمت بورة قطع مكافئ وعلم مماسان له فالمطلوب إيجاد نقطتى التماس

(٦) المطلوب إيجاد الدليل لقطع مكافئ معلوم بورته والمماس في نقطة معلومة

(٧) إذا كان قطعان مكافئان لهما بورة مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن الوتر المشترك منصف الزاوية الواقعة بين الدليلين

(٨) إذا كان قطعان مكافئان لهما بورة مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بينهما وبين نقطة تقاطع الدليلين عمود على المماس المشترك

(٩) اذا فرض أن قطعين مكافئين متساويين لهما بورة مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن وترهما المشترك يمر بالبورة وعمود على المماس المشترك

(١٠) اذا فرض أن ك نقطة ثابتة ٦ ع نقطة على مستقيم ثابت ثم أخذنا نقطة ٧ على المستقيم بحيث يكون ع ٧ = ك ع فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطة ع والنقطة المنصفة للمستقيم ك ٧ هو مماس لقطع مكافئ بورته نقطة ك

(١١) اذا فرض أن ع ٧ هو الاحداثي الرأسى لأى نقطة على منحنى قطع مكافئ مثل نقطة ع وأخذت نقطة م على المحور بحيث يكون ا ٧ = م ٧ فالمطلوب البرهنة على أن م ع مماس لقطع مكافئ ثابت

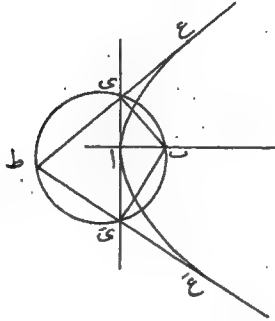
(١٢) اذا رسمنا مستقيما من بورة قطع مكافئ ليقطع المماس فى نقطة ع ويكون معه زاوية معلومة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للأوضاع المختلفة لنقطة التقاطع ع هو خط مستقيم

[ويكون التقاطع على المماس الذى يكون مع المحور الزاوية المعلومة]

٩٣٨ — النظرية العاشرة — كيفية رسم مماسات لمنحنى قطع مكافئ

من نقطة خارجة عنه نفرض ط النقطة الخارجة ثم نصل ط ب ونرسم دائرة قطرها ط ب فتقطع فى نقطتى ى ٦ ى مماس المنحنى فى نقطة الرأس ثم نقول ان الزاويتين ط ى ب ٦ ط ى ب قائمتان فيثبت لو مددنا ط ى ٦ ط ى على استقامتهما فانهما يكونان مماسين للقطع المكافئ لأن موقعى العمودين النازلين عليهما من البورة واقعان على المماس فى نقطة الرأس

وقد تقدم بيان كيفية رسم مماسات لجميع القطاعات المخروطية في بند ١٦



(مسألة ١) اذا فرضت ع نقطة على منحنى قطع مكافئ بورته نقطة ب
فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة المرسومة على ب ع باعتباره قطرها لها
تمس المستقيم المماس للمنحنى في نقطة الرأس

(مسألة ٢) اذا فرضت ط نقطة خارجة عن منحنى قطع مكافئ فالمطلوب
البرهنة على أن الدائرة المرسومة على ب ط باعتباره قطرها لها تقطع المستقيم
المماس للمنحنى في نقطة الرأس في نقطتين حقيقتين

(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم مماسين حقيقيين للقطع
المكافئ من أى نقطة خارجة عنه

٣٩ — النظرية الحادية عشرة — لو فرضنا ط ع ٦ ط ع أى
المماسين لقطع مكافئ بورته ب يكون المثلثان ط ع ب ٦ ط ب ع متشابهين

ولكن اذا كان ϵ τ يقطع المحور في نقطة τ يحدث

$$د ب ی ۱ = د ب ت ی = د ب ع ط$$

وحینئذ تکون $\Delta \cup \Delta' = \Delta \cup \Delta'' = \Delta \cup \Delta''' = \Delta \cup \Delta'''' = \Delta \cup \Delta'''''$

وكذلك تكون $د ب ط ع = د ب ع ط$

وحيث تكون الزاويتان الباقيتان من زوايا المثلثين ط ع ب و ط ب ع متساويتين أيضا وهما

$$\mathcal{E} \cup \mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$$

أى أن ط ع ٦ ط ع يقابلان زاويتين متساويتين رأسهما البورة
ثم نقول حيث ان المثلثين ط ع ب ٦ ط ع متساويا الزوايا فهما متشابهان
ويكون $ب ع : ب ط = ب ط : ب ع$
 $\therefore ب ع \times ب ع = ب ط^2$

نتيجة ١ — الزاوية ط ط ن مكملة لمجموع الزاويتين ب ط ع ٦ ط ع
ب ط ع أى مكملة لمجموع الزاويتين ب ط ع ٦ ط ع
فحينئذ تكون $د ط ط ن = د ط ب ع = د ط ب ع$
واذن فالزاوية الخارجة المكونة من تلاقي مماسين لقطع مكافئ مساوية
للزاوية التى تقابل أى المماسين ورأسها بورة المنحنى

نتيجة ٢ — حيث ان المثلثين ع ب ط ٦ ط ن ع متشابهان فينتج
من تشابههما أن $ط ع : ط ع = ب ط : ب ط$
وكذلك يكون $ع ب : ب ط = ب ط : ب ع$
 $\therefore ع ب : ب ط = ب ط : ب ع$
فحينئذ يكون $ط ع : ط ع = ب ط : ب ط$
واذا فالنسبة بين مربعي أى مماسين لقطع مكافئ تساوى النسبة لبعدي
تقطعي التماس عن البورة

مسائل

(١) اذا كان ط ع ٦ ط ع مماسين لقطع مكافئ ووصلنا ع ع
ليقطع الدليل فى نقطة ن. فالمطلوب البرهنة على أن ن ب عمود على ب ط
[لأن ن ب ن منصف للزاوية الخارجة ع ب ع وكذلك ب ط منصف
للزاوية ع ب ع]

(٢) اذا كان ط ع ٦ ط ع مماسين لقطع مكافئ بورتته ب فالمطلوب البرهنة على أن الدائرتين ط ع ب ٦ ط ع ب يماسان ط ع ٦ ط ع على التناظر

(٣) اذا علم مماسان لقطع مكافئ وعلمت نقطة التماس لأحدهما فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للبورة هو محيط دائرة

(٤) المطلوب رسم منحنى قطع مكافئ (أى ايجاد البورة والدليل) اذا علمت نقطتان واقعتان عليه والمماسان له فيها

(٥) اذا رسم مماسان لقطع مكافئ فى نقطة واقعة على المحور فالمطلوب البرهنة على أن هذين المماسين يقطعان أى مماس آخر فى نقطتين متساويتى البعد عن البورة

(٦) لو فرضنا أن مماسا متحركا لقطع مكافئ يقطع مماسين ثابتين له فى نقطتى ط ٦ ط ٦ فالمطلوب البرهنة على أن ب ط : ب ط ثابت مع فرض ب بورة المنحنى

(٧) المطلوب رسم منحنى قطع مكافئ اذا علمت ثلاثة مماسات له ونقطة التماس لأحدها

(٨) المطلوب رسم منحنى قطع مكافئ اذا علمت ثلاثة مماسات له وعلم اتجاه المحور

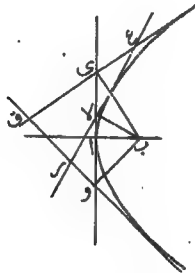
٤ . — النظرية الثانية عشرة — اذا كانت اضلاع مثلث مماسة لقطع مكافئ تكون الدائرة المرسومة على المثلث مارة بالبورة

للبرهنة على ذلك نقول انه معلوم أن مواقع الأعمدة النازلة من البورة على المماسات واقعة على خط مستقيم وهو المماس للمنحنى فى نقطة الرأس

ولكنه ثابت بناء على نظرية هندسية مشهورة انه اذا كانت مواقع الاعمدة النازلة من نقطة على أضلاع المثلث الثلاثة واقعة على خط مستقيم فان هذه النقطة يلزم أن تكون واقعة على الدائرة المرسومة حول المثلث *

ويمكن اثبات هذه النظرية بطريقة ثانية فنقول

لنفرض $ع ق$ المثلث المكون من المماسات الثلاثة ثم نرسم مماسا للنحنى في نقطة الرأس فيقطع المستقيمتين الثلاثة $ق ر$ $ر ع$ $ع ق$ في $و$ $لا$ $ى$ على التناظر



وحيث ان الزاويتين $ب و ق$ $و ق ر$ قائمتان فاذا تكون النقط $ب و لا$ $ى ق$ واقعة على محيط دائرة

وحيث تكون $ب د ق ى = د ب و لا$

وحيث ان الزاويتين $ب و ر$ $ب و لا$ قائمتان فتكون النقط $ب و لا$ $ى ق$ واقعة على محيط دائرة أيضا وحيث تكون

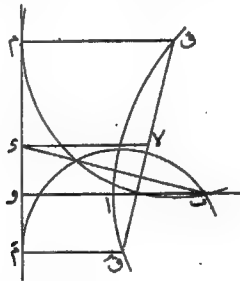
$د ب و لا = د ب ر لا$

وبناء عليه تكون $د ب ق ي = د ب ر$ و أى أن $د ب ق ع = د ب ر ع$ ومنه ينتج أن النقط $ب ق ع$ واقع على محيط دائرة

٤١ — النظرية الثالثة عشرة — النقط المنصفة لجملة أوتار متوازية فى قطع مكافئ هى واقعة على خط مستقيم مواز للحدود

نفرض $ق ق$ أحد الأوتار المتوازية ثم نرسم $ق م$ $ق م$ عمودين على الدليل

ثم اذا رسمنا دائرتين مركزهما $ق م$ $ق م$ ونصفا قطريهما $ق م$ $ق م$ على التناظر فانهما يمسان الدليل فى نقطتي $م م$ على التناظر ويمران بالبوردة



ولكن من الواضح أن الوتر المشترك فى اى دائرتين عمود على الخط الواصل بين مركزيهما ومنصف لأى مماس مشترك

وحينئذ يكون العمود النازل من نقطة $ب$ على $ق ق$ منصفاً للمستقيم $م م$ فى نقطة مثل نقطة $س$

وحيث ان z هي النقطة المنصفة للمستقيم mm فيكون المستقيم المرسوم من نقطة z موازيا لمحور المنحنى أى موازيا للخط mq q z منصفاً للخط qq في نقطة مثل نقطة la

ونقطة z واحدة لجميع الأوتار الموازية للمستقيم qq وينتج من ذلك أن النقط المنصفة لجملة أوتار متوازية في قطع مكافئ واقعة على مستقيم مواز للحوار

نتيجة — اذا رسمنا من نقطة la خطا موازيا للحوار ليقطع المنحنى في نقطة z يكون المماس في نقطة z موازيا للأوتار

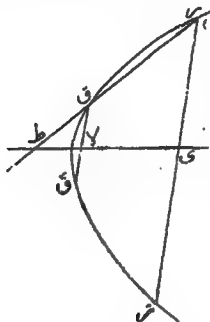
لأنه اذا كان المستقيم المرسوم من نقطة z موازيا للأوتار التي منتصفاتها على المستقيم z لا يقطع المنحنى في نقطة أخرى كنقطة s فينثذ تكون النقطة المنصفة للمستقيم z واقعة على المستقيم z لا واذا تكون واقعة على نقطة z وذلك لايتأتى الا اذا انطبقت النقطتان z s

تعريف — (قطر) القطع المكافئ هو المحل الهندسى للنقط المنصفة لجملة أوتار متوازية

وواضح من هذا التعريف أن جميع أقطار القطع المكافئ هي مستقيمات موازية للحوار وواضح أيضا أن المماس لمنحنى القطع المكافئ في نقطة تقاطع القطر بالمنحنى مواز للأوتار التي ينصفها هذا القطر

٤٢ — النظرية الرابعة عشرة — المماس لقطع مكافئ في نهايتى أى وتر يتقابلان على القطر الوتر المنصف لهذا

نفرض $ق ق^-$ $ك ك^-$ أى وترين متوازيين لقطع مكافئ ونفرض أن
 $ك ك^-$ نقطتان منصفتان لهما فيكون لى قطرا للنحنى



ثم نرسم $ق ك^-$ فيقطع لى فى نقطة ط
 فيكون $ل ط : ل ك^- = ل ك : ل ق^-$
 ∴ $ل ط : ل ك^- = ل ك : ل ق^-$

وحينئذ يكون ط $ق ق^-$ خطا مستقيما
 وإذا فالوتران $ق ك^-$ يتقابلان على القطر المار بنقطة لا وذلك
 صحيح لجميع أوضاع الوتر الموازى وهو $ك ك^-$
 ثم نفرض أن $ك ك^-$ يتحرك فى جهة $ق ق^-$ حتى ينطبق عليه فيتحرك
 تبعاً له المستقيمان $ق ك^-$ حتى يصيرا أخيراً مماسين للنحنى فى نقطتى
 $ق ك^-$ على التناظر
 وبناء عليه فالمماسان للنحنى فى $ق ك^-$ يتقابلان على القطر المار
 بنقطة لا

∴ ط ل = ل ق

$$\therefore ط : ع = ط : ل$$
$$\mathbb{V}_\ell = \ell \downarrow \quad \therefore$$

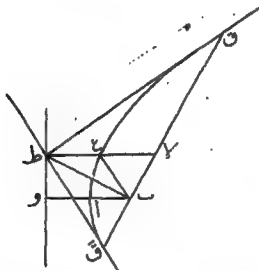
نتیجہ — جیٹ ان $ط ل = ل ق$ فیثج أن

$$\text{ل ق : ل ع} = \text{ل ط : ل ع}$$

أى مثلث ضلعا موازيان للمماسي التقطع المكافئ وقاعدته موازية لمحوره

٤٤ - النظرية السادسة عشرة - في القطع المكافئ طول الوتر

البورى الموازى للماس القطع المكافئ فى نقطة ع يساوى د ب ع



للبهنية على ذلك نقول نفرض $Q \neq C$ الوتر البوري الموازي للـ AS في نقطة E فواضح أن المماسين في نقطة Q $6Q$ متعامدان ويتقاطعان في نقطة واقعة على الدليل وواقعة أيضا على القطر المار بنقطة E

وحينئذ تكون نقطة λ هي النقطة المنصفة لوتر المثلث القائم الزاوية $\lambda\mu\kappa$

$$\therefore \text{ق ق}^{\circ} = \text{ق لا} = \text{لا لا ط}$$

وكذلك يكون $\angle \text{ط ع مودا}$ على ق ق وتكون نقطة ع هي النقطة المنصفة للمستقيم ط لا وحينئذ تكون نقطة ع هي النقطة المنصفة لوتر المثلث القائم الزاوية ط ب لا

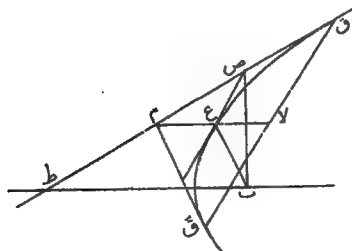
$$\cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \therefore$$

$$\therefore \text{قق} = 2\text{لاط} = 4\text{ع}$$

تعريف — الوتر البورى الموازى للماس فى نقطة كنتقة ع لمنحنى قطع مكافئ يسمى (الوتر البورى القاسم) للقطر المار بنقطة ع

٤٥ - النظرية السابعة عشرة - الاحداثى الرأسى لأى قطر هو
ومسط متناسب بين الاحداثى الأفقى والوتر البورى القاسم لهذا القطر

$$[y_e \times e \cup \frac{1}{2} = \frac{1}{2} q]$$



نفرض ان المماس في نقطة ن يقطع القطر الماز بنقطة ع في م ويقطع المحور في نقطة ط

ثم نفرض أن المماسين في نقطتي ع ك ن يتقابلان في نقطة ص ثم نصل
ب ع ك ب ص ك ب ق

فيكون ع ص منصفاً للزاوية م ع ب [بمقتضى النظرية السادسة]
∴ الزاوية ب ع ص = الزاوية ص ع م

وحيث أن ص ع ك ص ن مماسان
فتكون الزاوية ب ص ع = الزاوية ب ق ص [بمقتضى النظرية الحادية عشرة]
= الزاوية ب ط ن [بمقتضى النظرية السابعة]
= الزاوية ع م ص

وحيث أن تكون المثلثان ب ع ص ك ص ع م متشابهين
∴ ب ع : ع ص = ع م : ص ك

∴ $\frac{ب ع}{ع ص} = \frac{ع م}{ص ك} = \frac{٢}{٤}$
ولكن حيث أن م لا = م ٢ ع فيكون ق لا = ٢ ع ص
وحيث أن يكون ق لا = ٤ ع ص = ٤ ب ع × ع لا
نتيجة — إذا رسمنا ق ز عموداً على القطر ع لا في قطع مكافئ وفرضنا
ق لا الاحداثي الرأسى لهذا القطر يكون ق ز = $\frac{٢}{٤}$ ع لا
لأنه ينتج من تشابه المثلثات أن

$$ق ز : ق لا = \frac{٢}{٤} ع : \frac{٢}{٤} ع ط = \frac{٢}{٤} ع : ب ع$$

$$\frac{٢}{٤} ع : ب ع = \frac{٢}{٤} ع : ب ع$$

$$ب ع : ب ع = ١ : ١$$

وواضح من الارتباط ق لا = ٤ ب ع × ع لا أننا إذا فرضنا مستقيمين
ثابتين كالمستقيمين م ١ م ٢ م ٣ ثم رسمنا من نقطة ق المستقيم ق لا موازياً
للمستقيم م ٣ ومددناه ليقطع م ١ في نقطة لا فإن النقطة ق تتحركها بكيفية

تجعل \mathcal{M} لا يتغير بتغير $\overline{C^2}$ لا ترسم قطعاً مكافئاً يكون \mathcal{M} اقطاراً له $\mathcal{M} \mathcal{C}$ مماساً له في طرف هذا القطر

فلو كان $\overline{C^2}$ لا يتغير بتغير \mathcal{M} لا ينتج من ذلك مباشرة أن العمود المرسوم على $\mathcal{M} \mathcal{C}$ من نقطة \mathcal{C} يتغير كتغير مربع العمود المرسوم على \mathcal{M}

وبناء عليه فإن النقطة ترسم قطعاً منحنيًا إذا تحركت بكيفية مخصوصة بحيث يكون بعدها العمودى عن أحد مستقيمين معلومين (مكونين لأى زاوية) يتغير كتغير بعدها العمودى عن المستقيم الثانى

ومن المهم أيضاً أن نلاحظ أنه إذا رسم مستقيم ليقطع مستقيمين ثابتين بحيث أن الجزء من أحد المستقيمين الذى يحدده القاطع من نقطة التقاطع يتغير كتغير مربع الجزء من المستقيم الآخر فإن هذا المستقيم القاطع يمس دائماً قطعاً مكافئاً ثابتاً يكون أحد المستقيمين الثابتين قطراً له والآخر مماساً له من طرف هذا القطر

لأننا لو فرضنا $\mathcal{M} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C}$ ص هما المستقيمان الثابتان ثم رسمنا المستقيم $\mathcal{C} \mathcal{C}$ ص قاطعاً لهما بحيث يكون $\mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} = \mathcal{C} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mathcal{C}$ مع فرض $\mathcal{C} \mathcal{C}$ بعداً ثابتاً . ثم رسمنا من نقطة \mathcal{C} خطاً يكون مع المستقيم $\mathcal{C} \mathcal{C}$ زاوية مساوية للزاوية $\mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C}$ وفرضنا نقطة \mathcal{B} على هذا الخط بحيث يكون $\mathcal{C} \mathcal{C} = \mathcal{C} \mathcal{C}$ فانتا نرى أن $\mathcal{M} \mathcal{C}$ ص دائماً مماس لقطع مكافئ بورتة نقطة \mathcal{B} ويمر منحنىه في نقطة \mathcal{C} ويكون $\mathcal{C} \mathcal{C}$ قطراً له

(مسألة ١) إذا كان \mathcal{C} لا أى احدائى رأسى للقطر المرسوم من نقطة ثابتة كنقطة \mathcal{C} على منحنى قطع مكافئ ورسم متوازى الاضلاع $\mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C}$ فال المطلوب اثبات أن المستقيم لا $\mathcal{C} \mathcal{C}$ مماس لقطع مكافئ ثابت وذلك لأن $\mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} = \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} = \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C}$ لا غيلاً يكون $\mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C} \mathcal{C}$ لا وبناء عليه يكون $\mathcal{C} \mathcal{C}$ لا مماساً لقطع مكافئ ثابت أحد اقطاره المستقيم لا $\mathcal{C} \mathcal{C}$ والمماس له من طرف هذا القطر هو المستقيم $\mathcal{C} \mathcal{C}$

(مسألة ٢) $٢ ١ ٦ م ع$ مستقيمان ثابتان ورسمنا دائرة تمر بالنقطة الثابتة $ع$ وتمس المستقيم $٢ م$ والمطلوب البرهنة على أنه اذا كانت الدائرة تمس $٢ م$ في نقطة $ع$ وتقطع $٢ م$ في نقطة ثانية كنقطة $ن$ فان المستقيم $ع ن$ يمس على الدوام قطعاً مكافئاً ثابتاً

(مسألة ٣) المطلوب اثبات أنه اذا أخذت جملة اوتار متوازية فان المجموع الجبري للعمودين النازلين من نهايتي أى وتر منها على محور المنحنى يكون ثابتاً

(مسألة ٤) اذا كان وتران من قطع مكافئ يكونان مع المحور زاويتين متساويتين وبشرط أن لا يكونا متوازيين فان المجموع الجبري للاحداثيات الرأسية لأطرافها الأربعة يساوى صفراً

(مسألة ٥) المطلوب رسم وتر بوري ذى طول معلوم في قطع مكافئ

(مسألة ٦) اذا كان وتران بوريان في قطع مكافئ متساويين فانهما يكونان مع المحور زاويتين متساويتين

(مسألة ٧) المطلوب البرهنة على أن الوتر البوري العمودى في قطع مكافئ هو أقصر الأوتار البورية في القطع المكافئ

(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع مماسين لقطع مكافئ في طرفي أى وتر بوري وبين نقطة تقاطع العمودين على المنحنى في هذين الطرفين مواز للمحور

(مسألة ٩) اذا فرضنا أن $ن$ لا هو الاحداثي الرأسى للقطر المار بنقطة $ع$ وفرضنا $ع ٤$ الاحداثي الرأسى للقطر المار بنقطة $ن$ فالمطلوب البرهنة على أن $لا ٤$ مواز للمستقيم $ع ن$

(مسألة ١٠) اذا فرض أن ط و ٦ ط و ٢ مماسان لقطع مكافئ بورته ب وفرض ان القطر المار بنقطة ط يقطع الدليل في نقطة ص وأن المستقيم و ٢ يقطع المحور في نقطة م فالمطلوب البرهنة على أن ب م ص ط متوازي أضلاع

(مسألة ١١) اذا فرض أن ك و ٦ ك و ٢ مماسان لقطع مكافئ ورسمنا ك م عمودا على المحور فالمطلوب البرهنة على أن و ٢ يقطع المحور في نقطة م بحيث تكون نقطة الرأس للقطع المكافئ منصفة للمستقيم م م

(مسألة ١٢) اذا فرض أن ع و وتر في قطع مكافئ عمودى على المنحنى في نقطة ع ٦ أن المماسين له في نقطتي ع ٦ يتقاطعان في نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن القطر المار بنقطة ك يمر بالطرف الثانى للوتر البورى المرسوم من نقطة ع

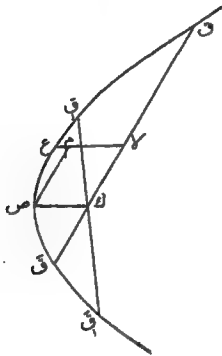
(مسألة ١٣) اذا فرض أن ط و ٦ ط و ٢ مماسان لقطع مكافئ بورته نقطة ب وأن القطر المار بنقطة ط يقطع المنحنى في نقطة ع فالمطلوب اثبات أن $ب و + ب و = ٢ ط ع + ٢ ع ب$

(مسألة ١٤) اذا فرض أن (و لا) أى احدائى رأسى للقطر الثابت (ع لا) فالمطلوب البرهنة على أن النقطة المنصفة للخط و لا ترسم قطاعا مكافئا

(مسألة ١٥) اذا فرض أن و ٢ أى وتر في قطع مكافئ وموازى لاس في نقطة ثابتة مثل نقطة ع وأخذت نقطة مثل نقطة م على و ٢ بحيث يكون و م : م و ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة م هو قطع مكافئ يمر بقطع المكافئ المعلوم في نقطة ع

(مسألة ١٦) مفروض قطع مكافئ مرسوم على الورق والمطلوب إيجاد البورة والدليل بواسطة استعمال المسطرة والبرجل

٦ ٤ — النظرية الثامنة عشرة — اذا تقاطع وتران لقطع مكافئ فان نسبة المستطيلين المكونين من أجزائهما الى بعضهما تساوى النسبة بين الوترين البوريين الموازيين لهما.



لنفرض أن الوترين ١٢ و ١٦ و ١٤ يتقاطعان في نقطة $ك$ ثم ننصف الوتر ١٢ بنقطة $لا$ ونرسم من نقطة $لا$ القطر $ع$ $لا$ ومن نقطة $ك$ القطر $ك$ $ص$ ثم نرسم $ص$ $م$ احدائيا رأسيا للقطر $ع$ $لا$ فيكون

$$١٤ \cdot ك \cdot ١٦ = ١٢ \cdot لا \cdot ١٤ = ١٢ \cdot لا \cdot ١٦ - ١٢ \cdot ص \cdot ١٦$$

$$= ١٢ \cdot ع \cdot ١٤ - لا \cdot ١٢ \cdot ١٦ =$$

$$= ١٢ \cdot ع \cdot (١٤ - لا) =$$

$$= ١٢ \cdot ع \cdot ص \cdot ك$$

وكذلك اذا رسمنا القطر $ع$ $لا$ منصفاً للوتر ١٢ يكون

$$١٦ \cdot ك \cdot ١٢ = ١٤ \cdot ب \cdot ١٦ = ١٤ \cdot ب \cdot ص \cdot ك$$

$$\therefore ١٦ \cdot ك \cdot ١٢ : ١٦ \cdot ك \cdot ١٤ = ١٤ \cdot ب \cdot ١٦ : ١٤ \cdot ب \cdot ١٢$$

ولكن الوترين البوريين الموازيين للماسين في تقطعي ع ٦ هما ع ٤ ب ع ٦ ع ٤ ب على التناظر [بمقتضى النظرية السادسة عشرة]

إذا رسمنا وترين لقطع مكافئ في اتجاهين ثابتين فإن الوترين البوريين لهما لايتغيران بنفروض نقطة تقاطع الوترين المرسومين وبناء عليه فنسبة المستطيلين المتكوينين من أجزاء أى وترين في قطع مكافئ لاعلاقة لها بموقع نقطة تقاطع الوترين وحينئذ تكون مساوية لنسبة مربعي الماسين الموازيين لهما

٧ ع - النظرية التاسعة عشرة - إذا كانت دائرة تقطع قطعاً مكافئاً في أربع نقط فإن الخط الواصل بين أى نقطتين من نقط التقاطع يكون مع المحور زاوية مساوية للزاوية التي يكونها معه المستقيم الواصل بين النقطتين الأخرين

للبرهنة على ذلك نفرض ك ٦ ل ٦ م ٦ د نقط التقاطع الأربعة ثم نقول ان الوترين ك ٦ ل ٦ م ٦ د لايمكن أن يكونا متوازيين الا اذا كانا عمودين على المحور لأن المستقيم الواصل بين النقط المنصفة لأوتار متوازية في دائرة عمود عليها واذا فبمقتضى النظرية الثالثة عشرة يلزم أن تكون الأوتار عمودية على محور القطع المكافئ

فلنفرض اذا أن الوترين ك ٦ ل ٦ م ٦ د يتقاطعان في نقطة و وحيث ان النقط الأربع واقعة على منحنى قطع مكافئ فيكون

و ك . ول : و م . و د = ب ع : ب ع [بمقتضى النظرية الثامنة عشرة]

نفرض أن ب هي البؤرة ٦ ع ٦ ع هما نهايتا الوترين المنصفين للمستقيمين ك ٦ ل ٦ م ٦ د على التناظر ولكن بما أن النقط الأربع هي على محيط دائرة يكون

و ك . ول = و م . و د

فحينئذ يكون ب ع ٦ ب ع متساويين ولا بد أن يكونا اذا متساويين الميل

على المحور وفي جهتين متقابلتين منه وكذلك يكون المماسان في نقطتي ع ٦ ع ٦
زاويتين متساويتين مع المحور ويكونان موازيين للوترين ك ٦ ل ٦ م ٦
على التناظر

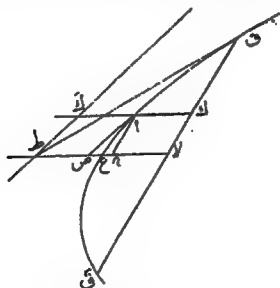
وبهذه الطريقة يمكن البرهنة على أن ك ٦ م ٦ ل ٦ و كذلك ك ٦ ل ٦ م ٦
متساويا الميل على المحور

فاذا كانت النقطتان ك ٦ ل ٦ منطقتين على بعضهما أى متى كانت الدائرة
مماسية للقطع المكافئ فان المماس في نقطة ك ٦ والوتر م ٦ يكونان مع المحور
زاويتين متساويتين وكذلك المستقيمان ك ٦ م ٦ ك ٦ ل ٦ م ٦ مع المحور
زاويتين متساويتين

وبالعكس النهايات الأربعة لأى وترين في قطع مكافئ اللذين يكونان مع
المحور زاويتين متساويتين ولكنهما غير متوازيين تكون واقعة على محيط دائرة

٤٨ — النظرية العشرون — * اذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة قاطعا

لمنحنى قطع مكافئ فان المماسين في نقطتي التقاطع يتقاطعان على مستقيم ثابت



* يجب حذف قراءة بقية هذا الفصل في الدراسة الأولى

للبهنة على ذلك نرسم من النقطة الثابتة ك مستقيما يقطع القطع المكافئ في نقطتي ق و ك ق ثم نصف ق ق في نقطة لا فيكون التماسان في نقطتي ق و ك ق متقاطعين في نقطة ط الواقعة على القطر المرسوم من نقطة لا ويكون ط ع = ع لا

ثم نرسم من نقطة ك القطر ك ا ك ونفرض أن التماس في نقطة ا يقطع ط ع لا في نقطة ص ثم نرسم ا د موازيا للمستقيم و د فيكون ص ع = ع د

وجيند يكون

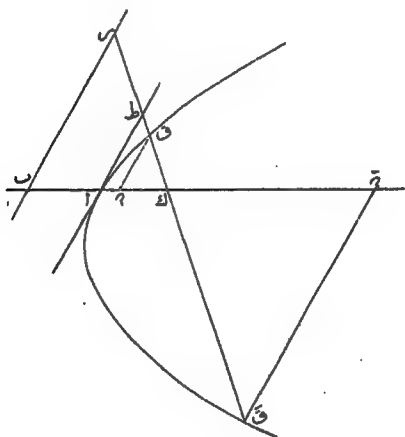
$$\text{ط ص} = \text{ط ع} - \text{ص ع} = \text{ع لا} - \text{ع د} = \text{د لا} = \text{ا ك}$$

ومن ذلك نرى ان المستقيم المرسوم من نقطة ط موازيا للاس في نقطة ا يقابل القطر ك ا في نقطة ثابتة ك بحيث يكون ا ك = ص ط = ك ا فيتضح اذا أنه مهما كان اتجاه ق ق تكون نقطة ط واقعة على مستقيم موازيا للاس في نقطة ا ومار بنقطة ك بحيث يكون ا ك = ك ا ونرى في الشكل أن نقطة ك واقعة داخل المنحنى واذا كانت خارجة عنه يمكن البرهنة على هذه النظرية بهذه الطريقة بعينها ولكن في هذه الحالة يمكن رسم مستقيمين من نقطة ك كل منهما يقطع المنحنى في نقطتين منطبتين على بعضهما أى أن المستقيمين يكونان مماسين للمنحنى ومارين بنقطة ك فاذا انطبقت النقطتان ق و ك ق على بعضهما انطبقت عليهما نقطة ط أيضا واذا فالحل الهندسي لنقطة ط يمر بنقطتي التماس للماسي المنحنى المرسومين من نقطة ك

ويمكن البرهنة بطريقة مشابهة للطريقة المتقدمة على عكس هذه النظرية وهو انه اذا فرضت نقطة على مستقيم ثابت ورسم منها تماسا لمنحنى القطع المكافئ فان المستقيم الواصل بين نقطتي التماس يمر بنقطة ثابتة

وواضح من النظرية الخامسة أن الدليل هو قطبي البورة وأن البورة هي قطب الدليل

٤٩ - النظرية الحادية والعشرون - إذا رسم أي وتر لقطع مكافئ من النقطة الثابتة ك ليقطع المنحنى في نقطتي ق ٦ ق- ويقطع قطبي نقطة ك في س ويقطع في نقطة ط المماس للمنحنى في نقطة ا التي هي نهاية القطر المرسوم من نقطة ك فإنه يكون ط ك وسطا متناسبا بين ط ق ٦ ط ق- ويكون س ك وسطا متناسبا توافقيا بين س ق ٦ س ق-



لانه بمقتضى النظرية الثامنة عشرة نسبة ط ق . ط ق الى ط ا
تساوى النسبة الكائنة بين مربعي الماسين الموازيين لها

وبمقتضى نتيجة النظرية الخامسة عشرة تكون النسبة بين الماسين الموازيين
للتقامين ط ك و ط ا مساوية لنسبة المستقيمين ط ك الى ط ا المذكورين

$$\text{وبناء عليه يكون ط ق . ط ق} = \text{ط ا}^2 = \text{ط ك}^2 : \text{ط ا}^2$$

$$\therefore \text{ط ق . ط ق} = \text{ط ق}^2 \dots \dots \dots (١)$$

ولنفرض أن القطر المرسوم من نقطة ك يقطع قطبي نقطة ل في نقطة ب
فحيث ان قطبي نقطة ك مواز للتقيم ا ط فيكون

$$\text{ك ط} : \text{ط ر} = \text{ك ا} : \text{ا ب}$$

$$\text{وحيث ان ك ا} = \text{ا ب فيكون ك ط} = \text{ط ر}$$

$$\text{ولكن بمقتضى (١) ط ق} : \text{ط ك} = \text{ط ك} : \text{ط ق}$$

$$\therefore \text{ط ق} + \text{ط ك} : \text{ط ك} = \text{ط ك} + \text{ط ق} : \text{ط ق} - \text{ط ك}$$

$$\text{أى أنه بناء على أن ط ك} = \text{ط ر}$$

$$\text{يكون ر ق} : \text{ق ك} = \text{ر ق} : \text{ك ق}$$

$$\therefore \text{ر ق} : \text{ر ق} = \text{ق ك} : \text{ك ق}$$

$$= \text{ر ك} - \text{ر ق} : \text{ر ق} - \text{ر ك} \dots (٢)$$

وبناء عليه فان ر ق و ر ك و ر ق تكون متوالية توافقية

ثم نقول اذا كان ق د و ق ه احداثيين رأسيين للقطر ا ك أى
انهما موازيان للتقيم ا ط يحدث

$$\text{ا د} : \text{ا ك} = \text{ط ق} : \text{ط ك}$$

$$\text{وأن ا ك} : \text{ا د} = \text{ط ك} : \text{ق د}$$

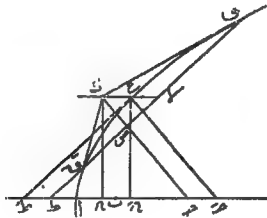
وبناء عليه ينتج بمقتضى (١)

$$ا : ا ك = ا ك : ا ك$$

أو بعبارة أخرى $ا . ا ك = ا ك . ا ك$ (٣)

٥ - وهذه النتيجة مفيدة كثيرا ويمكن وضع النظريتين السابعة والثامنة بصورة عامة فنقول

إذا أنزل من نقطة مثل ك عمودك د على محور قطع مكافئ ورسم ك ص ح
عمودا على قطبي نقطة ك بالنسبة لهذا المنحنى فيقطع القطبي في نقطة ص
ويقطع المحور في نقطة ح ومذ قطبي نقطة ل ليقطع المحور في نقطة ط يكون
 $ط ا = ا د ٦ ط ب = ب ح = ب ص ٦ د ح = ح ط ٦ ا ب = ب ط$



ولنفرض ان القطر المار بنقطة ك يقطع المنحنى في نقطة ع ويقطع القطبي في نقطة لا

ولنفرض ان المماس والعمودى في نقطة ع يقطعان المحور في ط ٦ ح
على التناظر

ونفرض ان $\widehat{د} \widehat{ع}$ هو الاحداثى الرأسى لنقطة $\widehat{ع}$

فيحدث $\widehat{ط} \widehat{ط} = \widehat{ع} \widehat{لا} = \widehat{ك} \widehat{ع} = \widehat{د} \widehat{د}$

ولكن $\widehat{ط} \widehat{ا} = \widehat{ا} \widehat{د}$

$\therefore \widehat{ط} \widehat{ا} - \widehat{ط} \widehat{ط} = \widehat{ا} \widehat{د} - \widehat{د} \widehat{د}$

$\therefore \widehat{ط} \widehat{ا} = \widehat{ا} \widehat{د}$

ثم ان $\widehat{د} \widehat{د} = \widehat{ك} \widehat{ع} = \widehat{ع} \widehat{لا} = \widehat{ط} \widehat{ط}$

وكذلك $\widehat{ط} \widehat{ب} = \widehat{ب} \widehat{د}$

$\therefore \widehat{ط} \widehat{ب} - \widehat{ط} \widehat{ط} = \widehat{ب} \widehat{د} - \widehat{د} \widehat{د}$

$\therefore \widehat{ط} \widehat{ب} = \widehat{ب} \widehat{د}$

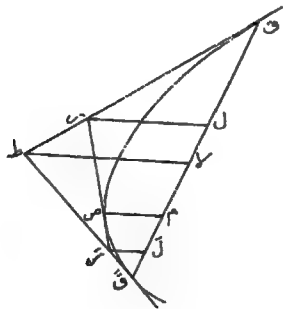
$\widehat{ب} \widehat{ص} = \widehat{ص} \widehat{ط}$ ان $\widehat{ط} \widehat{ص} \widehat{د}$ زاوية قائمة

وكذلك المثلثان $\widehat{ك} \widehat{د} \widehat{د}$ و $\widehat{ع} \widehat{د} \widehat{د}$ متساويان

$\therefore \widehat{د} \widehat{د} = \widehat{د} \widehat{د} = \widehat{ا} \widehat{ب}$

٥١ - النظرية الثانية والعشرون - أى مماسين لقطع مكافئ

يتسمهما أى مماس آخر أجزاء متناسبة



لنفرض ط ق ٦ ط قَ أى مماسين لقطع مكافئ ونفرض أن مماسا آخر
يقطعهما في نقطتي ر ٦ رَ على التناظر والمطلوب البرهنة على أن
ق ر : ر ط = ط رَ : رَ قَ

فلتكن ص نقطة التماس ر رَ ونرسم أقطارا للمنحنى في ر ٦ رَ
٦ ط ٦ ص فتقطع ق قَ في ل ٦ لَ ٦ لا ٦ لا م على التناظر

فيحدث $ل م = ل م$ $ق م : م ل = ق م : م ل$ $ق م : م ل = ق م : م ل$

∴ $ل ل = ل ل$ $ق ق = ق ق$ لا

ومنه ينتج أن $ق ل = ل ل$

وكذلك يكون $ل لا = ل قَ$

فيحدث ق ر : ر ط = ق ل : ل لا

$ق ل : ل لا = ق ل : ل لا$

$ق ر : ر ط = ق ر : ر ط$

ويحدث أيضا أن

$ر ص : ص ر = ل م : م ل = ق ل : ل لا$

$ق ر : ر ط = ق ر : ر ط$

(وبالعكس) إذا فرض أن مستقيمين ثابتين ط ق ٦ ط قَ يقطعهما

مستقيم متحرك في نقطتي ر ٦ رَ على التناظر بحيث يكون

ق ر : ر ط = ط رَ : رَ قَ

يكون المستقيم المتحرك دائما مماسا لمنحنى القطع المكافئ الذى يمس
ط ق ٦ ط قَ في نقطتي ق ٦ قَ

(نتيجة) من حيث ان ق ر : ر ط = ل م : م ل

$ق م : م ل = ق م : م ل$

فينتج أن ر ط رَ م متوازي أضلاع

(مسائل على القطع المكافئ)

- (١) اذا كان طول وتر قطع مكافئ مساويا لضعف البعد بين النقطة المنصفة له وبين الدليل فالمطلوب البرهنة على أن هذا الوتر يمر بالبؤرة
- (٢) على القاعدة المعلومة AB قد رسم أى مثلث متساوى الساقين ABC وعلى القاعدة AC قد رسم مثلث آخر متساوى الساقين AEC $\angle C$ مشابه للاول والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة E هو قطع مكافئ بؤرته نقطة A ودليله منصف للخط AB وعمود عليه
- (٣) ABC عبارة عن نقطة ثابتة C أى نقطة مفروضة على مستقيم ثابت ورسم CE عمودا على المستقيم الثابت ورسم AC عمودا على AE والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة E هو قطع مكافئ
- (٤) ABC وتر بؤرى لقطع مكافئ ورسم مستقيمان من نقطتي C موازيين للحدود وقاطعين في نقطتي $ص$ $ك$ $ص$ العمودين على المنحنى في نقطتي C $ك$ والمطلوب البرهنة على أن CE $ص$ $ص$ معين
- (٥) اذا رسم مستقيم من نقطة الرأس في قطع مكافئ عموديا على مماس المنحنى في أى نقطة C فقطع المستقيم المرسوم من نقطة C موازيا للحدود في نقطة $ن$ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة $ن$ هو مستقيم عمودى على المحور
- (٦) العمودى على قطع مكافئ في نقطة C يقطع المحور في نقطة $ح$ ورسم $ب$ عمودى على المماس في نقطة C من البؤرة ثم مد $ب$ على استقامته الى نقطة $س$ بحيث يكون $ب = س$ والمطلوب البرهنة على أن $س$ $ح$ مستطيل وأن الدائرة $س$ $ح$ تمر بنقطة رأس المنحنى
- (٧) المطلوب البرهنة على أن العمودى $ح$ على قطع مكافئ في نقطة C مساو للاحدائى الرأسى المنصف للمستقيم $ح$

(٨) اذا كانت نقطة a نقطة الرأس لقطع مكافئ 6 c أى نقطة على المنحنى ثم رسم من نقطة c مستقيم عمود على a ليقطع المحور فى نقطة h وأخذت نقطة u على امتداد بحيث يكون $h = c = u$ والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة u هو قطع مكافئ بوتره a

(٩) اذا كان قطعان مكافئان لهما دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطتي اشتراكهما مواز للمستقيمين الواصلين بين نقط تماس المماسين المشتركين وأنه فى منتصف المسافة بينهما

(١٠) اذا رسمت دائرة تمس محور قطع مكافئ وتمس البعد البورى b c لأى نقطة مثل c وتمس أيضا القطر المار بنقطة c فالمطلوب البرهنة على أن مركز الدائرة لابد أن يقع على قطع مكافئ آخر أو على المماس للقطع المكافئ الأول فى نقطة الرأس

(١١) اذا كان a c قطاع دائرة معلومة مركزها h ونصف قطرها h ثابت ثم رسمت دائرة تمس القوس a c من الخارج وتمس أيضا امتداد a h c فالمطلوب البرهنة على أن مركز هذه الدائرة مهما اختلف موضع نقطة c واقع على أحد منحنى قطع مكافئ

(١٢) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقاطع عمودين على قطع مكافئ فى نهايتى وتر بورى هو قطع مكافئ آخر

(١٣) ربط خيط غير محدود c u فى نقطة u 6 وفرض أن c u حركتان صغيرتان c u يتحركان عليه فإذا كان الخيط دائماً مشدوداً وتحرك الحركتان بحيث يكون c دائماً مساوياً للبعد u u وبحيث يكون اتجاه c u دائماً ثابت فالمطلوب البرهنة على أن c u يتحركان على قوسين من قطعين مكافئين لهما بورة مشتركة وتر بورى عمودى مشترك

(١٤) ع عبارة عن أى نقطة على قطع مكافئ بورته ب ورأسه أ ورسم عمود على أ ع من نقطة ب ليقطع في نقطة ر المماس في نقطة الرأس والمطلوب البرهنة على أن الاحداثى الرأسى لنقطة ع هو ١ ٤ ر

(١٥) اذا فرضت نقطتان ثابتتان على محور في قطع مكافئ متساويا البعد من البورة ثم أزل منهما عمودان على مماس ما فالمطلوب البرهنة على أن فرق مربعى العمودين دائماً ثابت

(١٦) اذا رسم من أى نقطة ع على منحنى قطع مكافئ وتر يصنع مع المحور زاوية مساوية للزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى فى هذه النقطة فالمطلوب البرهنة على أن هذا الوتر يمس قطعاً مكافئاً ثابتاً

(١٧) اذا كان ع د هو الاحداثى الرأسى لأى نقطة ع واقعة على منحنى قطع مكافئ وفرض أن المماس لهذا المنحنى فى نقطة ع يقطع المماس له فى نقطة الرأس فى ع فالمطلوب البرهنة على أن د ع يمس قطعاً مكافئاً مساوياً للاول

(١٨) اذا رسم مماسان لقطع مكافئ من نقطة و الخارجة عنه ورسم مماسان آخران له أيضاً من نقطتى تقاطع المماسين الأولين مع الدليل فيقطعان المماسين المرسومين من نقطة و فى نقطتى أ ٦ سه فالمطلوب البرهنة على أن أ سه يمر بالبورة ب وأنه عمود على و ب

(١٩) ع اذا كانت ع نقطة على محيط دائرة وزسم منها ع د احداثياً رأسياً للقطر الثابت ٦ ١ ثم مد على استقامته الى نقطة ب بحيث يكون المربع المنشأ على ع د مساوياً للمستطيل المكون من د ب و مستقيم معلوم فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ب هو قطع مكافئ

(٢٠) اذا كان ط ع ٦ ط ب مماسين لقطع مكافئ بورته ب فى نقطتى ع ٦ ب وكان ب ع + ب د ثابتاً فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ط هو قطع مكافئ

(٢١) اذا كان ع ب عَ وترا بوريا لقطع مكافئ رأسه نقطة ا ثم رسم ا ع ا عَ ليقطعا الوتر البورى العمودى فى ن ك نَ على التناظر وكان ع د ك عَ دَ الاحداثيين الرأسيين لتقطى ع و عَ فالمطلوب البرهنة على أن د ع ب ص د ك عَ ب ص متوازيا اضلاع

(٢٢) اذا فرض أن ط ن ك ط دَ مماسان لقطع مكافئ بورته ب وأن القطر المرسوم من نقطة ط يقطع المنحنى فى نقطة ع فالمطلوب اثبات أن

$$ط ن . ط د = ط نَ . ط ع$$

(٢٣) اذا فرض أن منحنى قطع مكافئ يتدرج على منحنى قطع مكافئ ثابت مساوله بحيث تنطبق رأساهما قبل التحرك فالمطلوب البرهنة على أن بورة المنحنى المتحرك ترسم فى أثناء الحركة دليل المنحنى الثابت وأن الوتر البورى العمودى فى المنحنى المتحرك والمماس له فى نقطة الرأس يمسان دوائر ثابتة

(٢٤) اذا فرض أن قطعين مكافئين لهما بورة مشتركة ثم رسم من أى نقطة على المماس المشترك المماسان الآخران للمنحنين فالمطلوب البرهنة على أن الزاوية المحصورة بين هذين المماسين مساوية للزاوية المحصورة بين محورى المنحنين

(٢٥) اذا رسم ط ع ك ط ن مماسين لقطع مكافئ وكان ع ن العمودى فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من ب عمودا على ط ب منصف للمستقيم ط ن

(٢٦) اذا فرض أن جملة قطاعات مكافئة متساوية لها نقطة مشتركة وأن محاورها متوازية فالمطلوب البرهنة على أن رؤوسها واقعة على قطع مكافئ رأسه النقطة المعلومة

(٢٧) إذا علم الوتر البورى العمودى لقطع مكافئ واتجاه المحور ونقطة ثابتة على المنحنى والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للبورة هو قطع مكافئ.

(٢٨) المطلوب البرهنة على أن جميع القطاعات المكافئة التى لها دليل معلوم ونقطة معلومة تمس قطعاً مكافئاً ثابتاً بورته النقطة المعلومة

(٢٩) المطلوب البرهنة على أن كل القطاعات المكافئة التى لها دليل مشترك والتى كل بورها واقمة على محيط دائرة ثابتة تمس قطعين مكافئين ثابتين

(٣٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقط التى فيها قطعان مكافئان مشتركان فى البورة يقابلان زوايا متساوية هو المستقيم المنصف للزاوية المحصورة بين الدليلين

(٣١) إذا فرض أن المثلث المكون من ثلاثة مماسات لقطع مكافئ متساوى الساقين فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين رأس المثلث والبورة يمر بنقطة تماس القاعدة

(٣٢) المطلوب البرهنة على أنه إذا رسم مثلث متساوى الأضلاع مماسة أضلاعه لقطع مكافئ من الخارج تكون المستقيمت الواصلة بين البورة ورأس المثلث مارة بنقط التماس

(٣٣) إذا رسم شكل رباعى داخل دائرة فالمطلوب البرهنة على أن أحد أقطاره الثلاثة يميز ببورة القطع المكافئ الذى يمس أضلاعه

(٣٤) إذا فرض أن عمودين على منحنى قطع مكافئ فى E و F اللتين هما نهايتا وتر بورى يقطعان المحور فى G و H فالمطلوب البرهنة على أن العمود على E و F من منتصفه يمر بمنتصف G و H

(٣٥) المطلوب البرهنة على أن القطعين المكافئين اللذين هما محوران متوازيان لا يتقاطعان الا فى نقطتين

(٣٦) إذا فرض أن العمودين على قطع مكافئ في ع ٦ ع ٦ التين هما نهايتا وتر بوري يقطعان المحور في ح ٦ ع ٦ على التناظر وأن المماسين في نقطتي ع ٦ ع ٦ يتقاطعان في ط فالمطلوب البرهنة على أن الدائرتين ب ع ح ٦ ب ع ٦ يتقاطعان في نقطة مثل س على امتداد ط ب بحيث يكون ط ب = ب س

(٣٧) إذا فرض أن أ ب ح مثلث مرسوم داخل منحنى قطع مكافئ ٦ ب ٦ ب ٦ مثلث آخر أضلاعه مماسات للمنحنى وموازية لأضلاع المثلث أ ب ح فالمطلوب البرهنة على أن أضلاع المثلث أ ب ح أربعة أمثال الأضلاع المناظرة لها في المثلث ٦ ب ٦ ب ٦

(٣٨) إذا رسم مماس لقطع مكافئ في نقطة ع وقطع المحور في نقطة ط وفرض أن الوتر ع ن والمماس ع ط يصنعان مع المحور زاويتين متساويتين فالمطلوب البرهنة على أن ع ن = ع ط

(٣٩) إذا رسم مماسان لقطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن العمود النازل من البورة على وتر التماس منصف الجزء المماس في نقطة الرأس المحصور بين المماسين المذكورين

(٤٠) إذا مد الاحداثي الرأسى د ع لنقطة ع الواقعة على منحنى قطع مكافئ على استقامته الى نقطة ن بحيث يكون ع ن = ع ب فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو قطع مكافئ يمس المماس للقطع المكافئ الأول في نقطة الرأس ويكون القطر المناظر هو المماس للقطع المكافئ الأول في نهاية الوتر البورى العمودى

(٤١) إذا فرض مماسان لقطع مكافئ أحدهما يمسه في نقطة متغيرة ع والآخر في نقطة ثابتة ن وأن المماسين يتقاطعان في نقطة ط ثم قسمنا ع ط

بنسبة ثابتة بنقطة ϵ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة ϵ هو قطع مكافئ يمس القطع المكافئ المعلوم في نقطة ν

(٤٢) المطلوب البرهنة على أن غلاف ادلة القطاعات المكافئة التي لها رأس مشتركة مثل α وتمر بنقطة ثابتة مثل ϵ هو قطع مكافئ طول وتره البورى العمودى مساوٍ للمستقيم $\alpha \epsilon$

(٤٣) المطلوب رسم مثلث داخل قطع مكافئ معلوم بحيث تكون أضلاعه موازية لثلاثة مستقيمت معلومة

(٤٤) إذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة كنقطة α ليقطع مستقيمين ثابتين κ و λ في نقطتي β و γ على التناظر ثم فرضت نقطة عليه مثل ϵ بحيث يكون $\alpha \epsilon = \alpha \beta$ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة ϵ هو قطع مكافئ مار بنقطتي α و κ ومحوره مواز للمستقيم $\kappa \epsilon$ والمماس له في نقطة α مواز للمستقيم $\kappa \epsilon$

(٤٥) المطلوب رسم دائرة داخل الجزء من القطع المكافئ المحدود بضعف الرأسى

(٤٦) إذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة κ ليقطع قطعا مكافئا في نقطتي ν و γ فالمطلوب البرهنة على أن المستطيل المكوّن من الاحدثيين الرأسيين لنقطتي ν و γ بالنسبة للقطر المار بنقطة κ ثابت

(٤٧) إذا رسم وتران بوريان متعامدان في قطع مكافئ وقطعا الدليل في نقطتي τ و ϕ فالمطلوب البرهنة على أن منصفى الزاويتين الواقعتين بين المماسين المرسومين من احدى النقطتين τ و ϕ موازيان للمماسين المرسومين من النقطة الثانية

(٤٨) إذا كان $\alpha \beta \gamma$ مثلثا متساوى الساقين مرسوما على قاعدة معلومة $\alpha \beta$ ثم رسم مماسان للدائرة $\alpha \beta \gamma$ في نقطتي α و γ وتقاطعا

في نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة ع هو قطع مكافئ بوتره ا ومحوره منطبق على الخط ا ب ووتره البورى العمودى مساو للمستقيم ا ب

(٤٩) اذا ثبتت ورقة من كتاب بحيث صار أحد أركانها الخارجة منطبقا على جانب الورقة الداخل فالمطلوب البرهنة على أن خط الانثناء يغلف منحني قطع مكافئ دليله الجانب الداخل المذكور

(٥٠) المطلوب البرهنة على أن المستقيم القاطع لمستقيمين ثابتين ك ا ك ب في تقطعي ع ك د على التناظر بحيث يكون ك ع + ك د ثابتا يمس قطعاً مكافئاً ثابتاً

(٥١) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الذى يقطع مستقيمين ثابتين بحيث يكون الفرق بين جزئى المستقيمين المنحصرين بين نقطة تقاطعهما والقاطع المذكور ثابتاً يغلف دائماً منحني قطع مكافئ

(٥٢) اذا رسم داخل شكل كثير الاضلاع منتظم معلوم شكل آخر كثير الاضلاع منتظم عدد أضلاعه مساو للاول فالمطلوب البرهنة على أن غلاف كل ضلع من الاضلاع هو قطع مكافئ

(٥٣) اذا رسم مستقيم قاطع دائرتين معلومتين بحيث يكون الوتران اللذان يحدثهما متساويين فالمطلوب البرهنة على أن هذا المستقيم يغلف قطعاً مكافئاً

(٥٤) المطلوب البرهنة على أن جميع أوتار القطع المكافئ التى متصفاتها واقعة على مستقيم عمود على محور القطع المكافئ تمس قطعاً مكافئاً آخر

(٥٥) اذا رسم وتر لقطع مكافئ بحيث يقابل زاوية قائمة رأسها فى رأس المنحنى فالمطلوب البرهنة على أنه يقطع المحور على مسافة من الرأس تساوى الوتر البورى العمودى

(٥٦) اذا فرض أن Γ و Γ' أى وترى قطع مكافئ ورسم من نقطة Γ تماس وفرض قطر يقطع التماس المذكور فى نقطة Γ ويقطع المنحنى فى نقطة Γ' والوتر $\Gamma \Gamma'$ فى نقطة Γ'' فالمطلوب اثبات أن

$$\Gamma \Gamma' : \Gamma \Gamma'' = \Gamma \Gamma'' : \Gamma \Gamma$$

(٥٧) المطلوب رسم وتر لقطع مكافئ من نقطة معلومة داخله بحيث يكون منقسماً بهذه النقطة قسمين بنسبة معلومة

(٥٨) اذا فرض أن التماس لقطع مكافئ فى نقطة Γ يقطع مماسين آخرين له من نقطة Γ فى نقطتى Γ' و Γ'' ويقطع القطر المار بنقطة Γ فى نقطة Γ''' فالمطلوب البرهنة على أن $\Gamma \Gamma' = \Gamma \Gamma''$

(٥٩) اذا فرض أن أى وتر $\Gamma \Gamma'$ فى قطع مكافئ يقطع المحور فى نقطة Γ'' فالمطلوب اثبات ما يأتى

$$\overline{\Gamma \Gamma'}^2 = \overline{\Gamma \Gamma''}^2 + \overline{\Gamma \Gamma'}^2 + \overline{\Gamma \Gamma''}^2 - \overline{\Gamma \Gamma''}^2$$

مع فرض أن Γ نقطة الرأس Γ'' ك الاحداثى الرأسى المار بنقطة Γ (٦٠) اذا رسم مماسان فى نهايتى وتر لقطع مكافئ وتقاطعا فى نقطة Γ وكانت Γ هى النقطة المناظرة لنقطة Γ للوتر العمودى على الوتر الأول فالمطلوب البرهنة على أن المستطيل المتكوّن من الاحداثيين الاقيين لنقطتى Γ و Γ' يساوى المستطيل المتكوّن من جزئى التماس فى نقطة الرأس اللتين يحددهما الوتران

(٦١) اذا علم من منحنى قطع مكافئ نقطة ومماس وإتجاه المحور فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للبوّرة هو قطع مكافئ آخر

(٦٢) اذا رسم قطعتان مكافئتان يماسان أضلاع مثلث وكانت بوّرتاهما نهايتى قطر الدائرة المرسومة حوله فالمطلوب البرهنة على أن محورى القطعين

المكافئين يتقاطعان على محيط الدائرة المرسومة حول المثلث وان المماسين لهما في نقطتي الرأس يتقاطعان على محيط دائرة التسع النقط في هذا المثلث

(٦٣) اذا فرضت نقطتان ثابتتان a و b على محور قطع مكافئ ورسم منهما الوتران a و b ع b و c ثم وصلنا c ليقطع المحور في نقطة p فالمطلوب البرهنة على أن نسبة $p : c$ لا علاقة لها بوضع نقطة c

(٦٤) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لمركز الدائرة التي تقطع مستقيما معلوما ومحيط دائرة معلوم بحيث يكون الوتران المتكوّنان متساويين ولهما طول ثابت هو قطع مكافئ

(٦٥) اذا فرض أن المماس لقطع مكافئ في نقطة c يصنع مع المحور زاوية مساوية للزاوية التي بين المحور ومستقيم آخر واصل بين البورة ونقطة تقاطع مماسين آخرين في نقطتي a و b فالمطلوب البرهنة على أن هذا الارتباط متماثل وأن الدائرة المرسومة حول المثلث المكوّن من المماسات الثلاثة تمس محور القطع المكافئ

(٦٦) اذا فرض أن c و b وتربوري لقطع مكافئ وأن c نقطة منصفة للمستقيم c ورسم c عمودا على c و b ليقطع المحور في نقطة d فالمطلوب البرهنة على أن d و b هما الوسط المناسب العددي والوسط المناسب الهندسي بين c و b ع

(٦٧) اذا كان a و b مماسين لقطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن محيطي الدائرتين المارين بنقطة k والمماسين للمستقيم a و b في نقطتي a و b على التناظر يتقاطعان على القطر المار بنقطة k ويكون مركزهما على الدليل

(٦٨) اذا رسمنا دائرة مركزها نقطة معلومة فقطعت مستقيمين متوازيين ثابتين في نقطتي a و b ونقطتي b و c على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمتين a و b و c و d و e و f كلها تمس قطعاً مكافئاً ثابتاً

(٦٩) ع عبارة عن أى نقطة مفروضة على منحنى قطع مكافئ بورت ه ثم أخذت نقطة ع على امتداد ع ب بحيث يكون ع ب = ب ع ورسم مماسات ع د و ه ع مماسين للنحنى والمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة ع د ه يس القطع المكافئ في نقطة ع ويمر بنقطة ع

(٧٠) اذا فرض أن قطاعين مكافئين لهما بورة مشتركة ومحوراهما في جهتين متقابلتين من البورة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقط المنصفة للاوتار في أيتهما المماس للنحنى الآخر هو قطع مكافئ آخر

(٧١) المطلوب البرهنة على أن النقط الثلاثة المنصفة لأقطار أى شكل رباعى واقعة على مستقيم مواز لمحور القطع المكافئ الذى يس أضلاع الشكل الرباعى المذكور

(٧٢) اذا فرض قطاعان مكافئان متساويان ومتماثلا الوضع ولهما محور واحد ثم رسم مماس للنحنى الداخلى فى نقطة د فقطع المنحنى الخارجى فى نقطتى ع ه فالمطلوب البرهنة على أن د ه هى النقطة المنصفة للمستقيم ع ه وأن البعد بين القطرين المارين بنقطتى ع ه ثابت لجميع أوضاع نقطة د

(٧٣) اذا فرض قطاعان مكافئان متحدان فى البورة والمحور ورسم مستقيم مواز للمحور فقطعهما فى نقطتى ع ه ورسم لهما مماسات فى ع ه فمماساتهما فى نقطتى ع ه هما مماسات لهما فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن نقطة ط واقعة فى منتصف المسافة بين الدليلين وأن ط ب منتصف للزاوية الخارجة ع ب ع

(٧٤) اذا فرض مماسان لقطاعين مكافئين متحدتين فى البورة والمحور ورسم لكل منهما مماس فى نقطة فمماساتهما فى نقطتى ع ه فالمطلوب البرهنة على أن نقطة ط اذا كانت على بعدين متساويين من القطرين المارين بنقطتى التماس تكون أيضا على بعدين متساويين من الدليلين

(٧٥) اذا فرض قطعان مكافئان متحدان في البورة والمحور ورسم من نقطة خارجة عنهما مماسان ولكل من المنحنيين ووصل وتر التماس $ع$ $ك$ $ل$ $ن$ فال المطلوب البرهنة على أنه اذا كانت $ع$ $ك$ $ل$ $ن$ واقعة على خط مستقيم فان $ع$ $ك$ $ل$ $ن$ تكون كذلك على خط مستقيم وأن $ع$ $ك$ $ل$ $ن$ يكونان موازيين للمحور

(٧٦) اذا رسم محيط دائرة مار بيورة قطع مكافئ ومماس للمنحنى في نقطة $ع$ ويقطعه في نقطتي $ل$ $م$ ويقطع المحور في نقطة $ن$ فال المطلوب البرهنة على أن $ل$ $م$ $=$ $ن$

(٧٧) اذا فرض أن $ع$ $ن$ عبارة عن وتر قطع مكافئ عمودى عليه في نقطة $ع$ ورسم $ن$ موازيا للمحور فقطع امتداد ضعف الرأسى $ع$ $ع$ في نقطة $ر$ فال المطلوب البرهنة على ان المستطيل المكون من $ع$ $ع$ $ك$ $ر$ ثابت

(٧٨) اذا فرض أن $ط$ $ا$ $ك$ $ط$ $ا$ مماسان لقطع مكافئ $ك$ $ع$ نقطة أخرى على المنحنى ورسم مماس في نقطة $ع$ فقطع القطرين المارين بنقطتي $ا$ $ك$ في $ا$ $ك$ $ا$ على التناظر ورسم أيضا من نقطة $ع$ مستقيمان موازيان للمماسين في نقطتي $ا$ $ك$ فقطعا القطرين المارين بنقطتي $ا$ $ك$ في نقطتي $ن$ $ك$ على التناظر فال المطلوب البرهنة على أن $ن$ $ك$ موازيان للماس في نقطة $ع$ وأنه اذا كانت نقطة $ك$ قطب المستقيم $ن$ $ك$ يكون $ك$ $ا$ $ك$ $ا$ موازيين للمماسين في نقطتي $ا$ $ك$ على التناظر

(٧٩) اذا فرض أن المثلث $ا$ $ب$ $ح$ مكون من ثلاثة مماسات لقطع مكافئ وأن المثلث $د$ $هـ$ $و$ مكون من المستقيمت الواصلة بين نقط تقاطع الاوتار المارة بنقطتين من نقط التماس مع القطر المار بنقطة التماس الثالثة فال المطلوب البرهنة على أن $ا$ $ك$ $ب$ $ح$ هي النقط المنصفة لاضلاع المثلث $د$ $هـ$ $و$

(٨٠) إذا رسمت دائرة قطرها ab الذى هو وتر فى قطع مكافئ^١ فقطعت المنحنى فى نقطتي c و d فالمطلوب البرهنة على أنه إذا كان اتجاه الوتر ab ثابتا يكون الفرق بين مربعي ac و ad ثابتا

(٨١) إذا رسم مماس لقطع مكافئ^٢ فى نقطة e ورسم مماسان آخران فقطعا الأول فى نقطتي s و t ورسم الوتر الواصل بين نقطتي التماس الأخيرتين فقطع القطر المار بنقطة e فى نقطة k فالمطلوب البرهنة على أن $se \cdot te = be \cdot ke$ مع فرض أن b بورة المنحنى

(٨٢) إذا رسم المماسان $ط د$ و $ط س$ لقطع مكافئ^٣ ورسم مماس فى نقطة e فقطع المماسين الأوليين فى نقطتي $س هـ$ و $ط هـ$ على التناظر ثم رسم $ط و$ موازيا للحدود فقطع المنحنى فى نقطة $و$ فالمطلوب البرهنة على أن المماس فى نقطة $و$ يمر بالنقطة المنصفة للمستقيم $س هـ$ وأنه بفرض b هى البورة يكون $س هـ = \frac{2}{e} = \frac{ط د}{e}$

(٨٣) إذا فرض أن مماسين ثابتين لقطع مكافئ^٤ يقطعهما بمماس متغير فى نقطتي $س هـ$ و $ط هـ$ فالمطلوب بيان أنه إذا رسم وتر لهذا القطع المكافئ^٥ مساو ومواز للمستقيم $س هـ$ فانه يكون غلافا لقطع مكافئ مساو للقطع المكافئ المذكور

(٨٤) إذا فرض أن $ع د$ وتر بورى فى قطع مكافئ^٦ $ط س$ أى نقطة مفروضة على القطر المار بنقطة $د$ فالمطلوب البرهنة على أن الوتر البورى الموازى للمستقيم $س هـ = \frac{2}{e} = \frac{ط د}{e}$

(٨٥) إذا رسم من نقطة على منحنى قطع مكافئ^٧ وتران متساويا الميل على المماس فى هذه النقطة فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين طول الوترين مساوية للنسبة بين جزئى القطارين المنحصرين بين الوترين والمنحنى

(٨٦) اذا فرض أن $ع$ و $ع'$ وتربوري في قطع مكافئ ورسم عمودان على المنحنى في نقطتي $ع$ و $ع'$ فقطعهما في نقطتين اجريين $و$ و $و'$ فالمطلوب البرهنة على أن $و$ و $و'$ مواز للستقيم $ع$ و $ع'$

(٨٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لبؤرة قطع مكافئ يمر مستقيمين معلومين ودليله يمر بنقطة معلومة هو محيط دائرة

(٨٨) اذا فرض أن $ك$ و $ك'$ مماسان لقطع مكافئ ورسم من نقطة $ك$ قطر للمنحنى فقطعه في $ع$ وقطع $و$ و $و'$ في $ع$ فالمطلوب بيان أنه اذا كان المماس في $ع$ يقطع $ك$ و $ك'$ في $س$ و $س'$ على التناظر فإن المنحنى يقسم كلا من $و$ و $و'$ بنسبة $٨ : ١$

(٨٩) اذا رسمت دائرتان تمس كل منهما قطعا مكافئا في نهايتي ضعف رأسي فالمطلوب البرهنة على أن مجموع طول المماسين للدائرتين من أى نقطة على منحنى القطع المكافئ أو الفرق بينهما ثابت ومساو للبعد بين وترى التماس (٩٠) اذا فرض قطع مكافئ ودائرتان تمس كل منهما المنحنى في نقطتين فالمطلوب البرهنة على أن محورهما الأصلي واقع في منتصف المسافة بين وترى التماس

(٩١) اذا فرض أن $ع$ و $و$ و $و'$ أربع نقط على منحنى قطع مكافئ ثم وصلنا $ع$ و $و$ فقطع القطر المار بنقطة $س$ في $و$ ووصلنا $س$ و $و'$ فقطع القطر المار بنقطة $و$ في $و'$ فالمطلوب البرهنة على أن $و$ و $و'$ مواز للستقيم $ع$ و $ع'$

(٩٢) المطلوب البرهنة على أن المحور القطبي للنقطة المنصفة للوتر العمودي على منحنى قطع مكافئ يقطع البعد البؤري لنقطة تقاطع الوتر والدليل على العمودي في الطرف الثاني للوتر

(٩٣) المطلوب البرهنة على أن محوري القطعين المكافئين اللذين يمران بأربع نقط معلومة على محيط دائرة يكونان متعامدين ومتقاطعين في مركز الثقل للنقط الأربعة

(٩٥) إذا فرض أن مماسا متحركا لقطع مكافئ معلوم يقطع مماسا ثابتا في نقطة ع فالمتطوِّب البرهنة على أن العمود من نقطة ع على المماس المتحرك يغلف قطعاً مكافئاً آخر

(٩٨) المطلوب البرهنة على أن النسبة بين أجزاء مماس القطع المكافئ الناشئة من تقاطعه مع ثلاثة مماسات ثابتة هي ثابتة

(٩٩) اذا فرض أن ط ع ٦ ط و مماسان لقطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن العمودى من نقطة ط على أى مماس آخر وسط متناسب بين بعدى ع ٦ و العمودين عن هذا المماس

(١٠٠) إذا رسمت أربعة مماسات لقطع مكافئ لتكوّن شكلاً رباعياً. ورسمت الأقطار الثلاثة لهذا الشكل وفرض أن نهاياتها هي ٦٦١ ، ٦٦٢ ، ٦٦٣ ، ٦٦٤ ، ٦٦٥ ، ٦٦٦ ، ٦٦٧ ، ٦٦٨ ، ٦٦٩ ، ٦٧٠ ، ٦٧١ ، ٦٧٢ ، ٦٧٣ ، ٦٧٤ ، ٦٧٥ ، ٦٧٦ ، ٦٧٧ ، ٦٧٨ ، ٦٧٩ ، ٦٨٠ ، ٦٨١ ، ٦٨٢ ، ٦٨٣ ، ٦٨٤ ، ٦٨٥ ، ٦٨٦ ، ٦٨٧ ، ٦٨٨ ، ٦٨٩ ، ٦٩٠ ، ٦٩١ ، ٦٩٢ ، ٦٩٣ ، ٦٩٤ ، ٦٩٥ ، ٦٩٦ ، ٦٩٧ ، ٦٩٨ ، ٦٩٩ ، ٧٠٠ ، ٧٠١ ، ٧٠٢ ، ٧٠٣ ، ٧٠٤ ، ٧٠٥ ، ٧٠٦ ، ٧٠٧ ، ٧٠٨ ، ٧٠٩ ، ٧١٠ ، ٧١١ ، ٧١٢ ، ٧١٣ ، ٧١٤ ، ٧١٥ ، ٧١٦ ، ٧١٧ ، ٧١٨ ، ٧١٩ ، ٧٢٠ ، ٧٢١ ، ٧٢٢ ، ٧٢٣ ، ٧٢٤ ، ٧٢٥ ، ٧٢٦ ، ٧٢٧ ، ٧٢٨ ، ٧٢٩ ، ٧٣٠ ، ٧٣١ ، ٧٣٢ ، ٧٣٣ ، ٧٣٤ ، ٧٣٥ ، ٧٣٦ ، ٧٣٧ ، ٧٣٨ ، ٧٣٩ ، ٧٤٠ ، ٧٤١ ، ٧٤٢ ، ٧٤٣ ، ٧٤٤ ، ٧٤٥ ، ٧٤٦ ، ٧٤٧ ، ٧٤٨ ، ٧٤٩ ، ٧٥٠ ، ٧٥١ ، ٧٥٢ ، ٧٥٣ ، ٧٥٤ ، ٧٥٥ ، ٧٥٦ ، ٧٥٧ ، ٧٥٨ ، ٧٥٩ ، ٧٦٠ ، ٧٦١ ، ٧٦٢ ، ٧٦٣ ، ٧٦٤ ، ٧٦٥ ، ٧٦٦ ، ٧٦٧ ، ٧٦٨ ، ٧٦٩ ، ٧٧٠ ، ٧٧١ ، ٧٧٢ ، ٧٧٣ ، ٧٧٤ ، ٧٧٥ ، ٧٧٦ ، ٧٧٧ ، ٧٧٨ ، ٧٧٩ ، ٧٨٠ ، ٧٨١ ، ٧٨٢ ، ٧٨٣ ، ٧٨٤ ، ٧٨٥ ، ٧٨٦ ، ٧٨٧ ، ٧٨٨ ، ٧٨٩ ، ٧٩٠ ، ٧٩١ ، ٧٩٢ ، ٧٩٣ ، ٧٩٤ ، ٧٩٥ ، ٧٩٦ ، ٧٩٧ ، ٧٩٨ ، ٧٩٩ ، ٨٠٠ ، ٨٠١ ، ٨٠٢ ، ٨٠٣ ، ٨٠٤ ، ٨٠٥ ، ٨٠٦ ، ٨٠٧ ، ٨٠٨ ، ٨٠٩ ، ٨١٠ ، ٨١١ ، ٨١٢ ، ٨١٣ ، ٨١٤ ، ٨١٥ ، ٨١٦ ، ٨١٧ ، ٨١٨ ، ٨١٩ ، ٨٢٠ ، ٨٢١ ، ٨٢٢ ، ٨٢٣ ، ٨٢٤ ، ٨٢٥ ، ٨٢٦ ، ٨٢٧ ، ٨٢٨ ، ٨٢٩ ، ٨٣٠ ، ٨٣١ ، ٨٣٢ ، ٨٣٣ ، ٨٣٤ ، ٨٣٥ ، ٨٣٦ ، ٨٣٧ ، ٨٣٨ ، ٨٣٩ ، ٨٤٠ ، ٨٤١ ، ٨٤٢ ، ٨٤٣ ، ٨٤٤ ، ٨٤٥ ، ٨٤٦ ، ٨٤٧ ، ٨٤٨ ، ٨٤٩ ، ٨٥٠ ، ٨٥١ ، ٨٥٢ ، ٨٥٣ ، ٨٥٤ ، ٨٥٥ ، ٨٥٦ ، ٨٥٧ ، ٨٥٨ ، ٨٥٩ ، ٨٦٠ ، ٨٦١ ، ٨٦٢ ، ٨٦٣ ، ٨٦٤ ، ٨٦٥ ، ٨٦٦ ، ٨٦٧ ، ٨٦٨ ، ٨٦٩ ، ٨٧٠ ، ٨٧١ ، ٨٧٢ ، ٨٧٣ ، ٨٧٤ ، ٨٧٥ ، ٨٧٦ ، ٨٧٧ ، ٨٧٨ ، ٨٧٩ ، ٨٨٠ ، ٨٨١ ، ٨٨٢ ، ٨٨٣ ، ٨٨٤ ، ٨٨٥ ، ٨٨٦ ، ٨٨٧ ، ٨٨٨ ، ٨٨٩ ، ٨٩٠ ، ٨٩١ ، ٨٩٢ ، ٨٩٣ ، ٨٩٤ ، ٨٩٥ ، ٨٩٦ ، ٨٩٧ ، ٨٩٨ ، ٨٩٩ ، ٩٠٠ ، ٩٠١ ، ٩٠٢ ، ٩٠٣ ، ٩٠٤ ، ٩٠٥ ، ٩٠٦ ، ٩٠٧ ، ٩٠٨ ، ٩٠٩ ، ٩١٠ ، ٩١١ ، ٩١٢ ، ٩١٣ ، ٩١٤ ، ٩١٥ ، ٩١٦ ، ٩١٧ ، ٩١٨ ، ٩١٩ ، ٩٢٠ ، ٩٢١ ، ٩٢٢ ، ٩٢٣ ، ٩٢٤ ، ٩٢٥ ، ٩٢٦ ، ٩٢٧ ، ٩٢٨ ، ٩٢٩ ، ٩٣٠ ، ٩٣١ ، ٩٣٢ ، ٩٣٣ ، ٩٣٤ ، ٩٣٥ ، ٩٣٦ ، ٩٣٧ ، ٩٣٨ ، ٩٣٩ ، ٩٤٠ ، ٩٤١ ، ٩٤٢ ، ٩٤٣ ، ٩٤٤ ، ٩٤٥ ، ٩٤٦ ، ٩٤٧ ، ٩٤٨ ، ٩٤٩ ، ٩٥٠ ، ٩٥١ ، ٩٥٢ ، ٩٥٣ ، ٩٥٤ ، ٩٥٥ ، ٩٥٦ ، ٩٥٧ ، ٩٥٨ ، ٩٥٩ ، ٩٦٠ ، ٩٦١ ، ٩٦٢ ، ٩٦٣ ، ٩٦٤ ، ٩٦٥ ، ٩٦٦ ، ٩٦٧ ، ٩٦٨ ، ٩٦٩ ، ٩٧٠ ، ٩٧١ ، ٩٧

الفصل الثالث

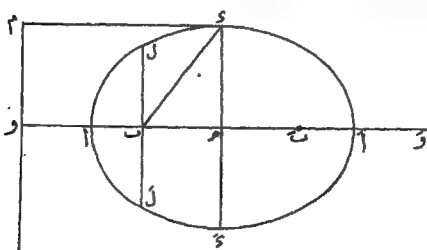
القطع الناقص

٥٢ - القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوٍ مشتمل على نقطة معلومة تسمى البؤرة ومستقيم معلوم يسمى الدليل ويكون تحركها بكيفية مخصوصة بحيث أن نسبة بعدها عن البؤرة إلى بعدها عن الدليل تكون ثابتة دائماً وأصغر من الوحدة وقد أثبتنا في الفصل الأول أنه يستنتج من هذا التعريف أن القطع الناقص متماثل بالنسبة للعمود النازل من البؤرة على الدليل وأثبتنا أيضاً أنه إذا كانت العمود المستقيم المذكور يقطع المنحنى في نقطتي ٦ ٦ وفرضنا أن ϵ هي النقطة المنصفة للمستقيم ٦ ٦ فإن منحنى القطع الناقص يكون متماثلاً بالنسبة للمستقيم المرسوم من نقطة ϵ موازياً للدليل ومن ذلك ينتج أن القطع الناقص له بؤرة أخرى على الخط ٦ ٦ ودليل آخر عمود على هذا الخط

وإذا رمزنا للبورتين بحرفي ب ٦ و ب ٦ ومددنا المستقيم ٦ ٦ على استقامته ليقطع الدليلين في نقطتي و ٦ و ٦ على التناظر فقد تقدم البرهان أيضاً على أن

$$ب : ب = ب : ب = ب : ب = ب : ب$$

المستقيمان المحدودان ٦ ٦ و ٦ ٦ يسميان (المحور الأكبر) و (المحور الأصغر) للقطع الناقص على التناظر



وانرم $س$ م عمودا على الدليل من نقطة $س$ فيكون

$$س : س = م : م = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$

وحيث ان $س = م$ و فيكون $س = س = ١$

$$س = س = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$

$$وواضح ان $س = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$$

$$١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$

$$وواضح ايضا ان $س = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$$

$$وحيث ان $س = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$$

واذا فرضنا ان $س$ هو الوتر البورى العمودى يكون

$$س : س = م : م = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$

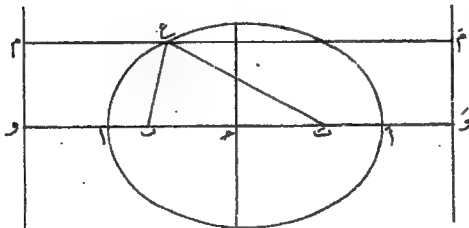
$$١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١ = ١ : ١$$

ومن ذلك يتضح ان نصف المحور الأصغر وسط متناسب بين نصف

المحور الأكبر ونصف الوتر البورى العمودى

٥٣ - النظرية الاولى - مجموع البعدين البورين لأى نقطة على

منحنى قطع ناقص ثابت



لنفرض $ب ك$ بورق القطع الناقص $ك ع$ أى نقطة على المنحنى
ثم نصل $ب ع ك$ ونزل من نقطة $ع$ المستقيم $ع م$ عمودا على
الدليلين ومتبعا بهما

$$\text{فاذن} \quad ب ع : ع م = ا د : ا هـ$$

$$\text{ويكون} \quad ب ع : ع م = ا د : ا هـ$$

$$\therefore ب ع + ع م : ع م = ا د + د هـ : ا هـ$$

$$\text{ولكن} \quad ا د + د هـ = ا هـ = ا هـ = ا هـ = ا هـ$$

$$\text{وحينئذ يكون} \quad ب ع + ع م = ا هـ$$

واذا فرضت نقطة خارجة عن المنحنى كنقطة $و$ مثلا فن السهل البرهنة
على أن $ب و + و ع$ أكبر من $ا هـ$

لأنه بفرض أن $ب و$ يقطع المنحنى فى نقطة $ع$ يكون

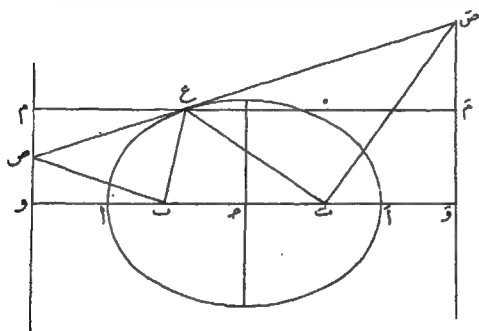
$$ب و + و ع = ب ع + ع و < ب و + و ع$$

وكذلك اذا فرضت نقطة $و$ داخل المنحنى يكون $ب و + و ع > ا هـ$

ويمكننا بواسطة الخاصة السالفة الذكر رسم منحنى القطع الناقص
بواسطة نقطة متحركة متحركا مستمرا

وذلك أننا نأخذ خطا له طول محدود ونربط طرفيه فى نقطتين مثل
 $ب ك$ ثم نشد الخيط بقلم رصاص ونرسم المنحنى . فلو فرضنا $ع$ أى
نقطة من النقط التى يرسمها القلم الرصاص يكون $ب ع + ع ك$ ثابتا
ومساويا لطول الخيط وتكون نقطة $ع$ اذا واقعة على منحنى قطع ناقص
بورتاه $ب ك$ ومحوره الأكبر مساو لطول الخيط

ثم نرسم من نقطة ع المستقيم م ع م عمودا على الدليلين ومنتهيها بهما ونفرض أن المماس في نقطة ع يقطع الدليلين في نقطتي ص 6 ص



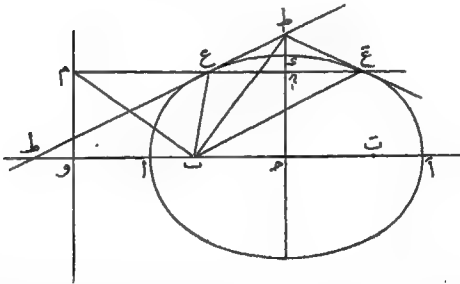
ثم فصل ب ع ك ا ب ص ه ح د ه
فيؤخذ من تشابه المثليين م ع ص ه ك ا ب ع ص ه أن
ص ه ع : ع ص ه = ع م : ع ا م
ع ب : ع ب =

وواضح بمقتضى بند ١٢ أن الزاويتين ص ب ع ٦ ص ب ع ٦ قائمتان وحيدتان
فالثلثان ص ب ع ٦ ص ب ع ٦ متشابهان ويؤخذ من تشابههما أن
$$د ب ع ص = د ب ع ص$$

٥٦ — النظرية الرابعة — اذا فرض أن المماس لقطع ناقص في نقطة ما مثل ع يقطع امتداد المحور الأصغر د في نقطة ط وكان ع د عمودا على المحور يكون $د ط \times د = د ز$

وللبرهنة على ذلك نمد ع د على استقامة لقطع المنحنى في نقطة أخرى ولتكن ع' مثلا ويقطع الدليل في نقطة م بحيث ان كل وتر عمودى على هذا المحور الاصغر ينصفه المحور المذكور يستنتج من ذلك كما في بند ١٨ نتيجة ٢ أن المماسين في نقطتي ع و ع' يتقاطعان على المحور الأصغر واذا يتقاطعان في نقطة ط وواضح بمقتضى بند ١٠ وبند ١٧ أن ب م و ب ط هما المنصف الخارجى والمنصف الداخلى على التناظر للزاوية ع ب ع' واذا فهما متعامدان

وحينئذ تكون $د ب ط =$ الزاوية المتممة للزاوية و ب م
 $د ب م =$



وحينئذ يكون المثلثان القائم الزاوية د ب ط و د ب م متشابهين ويكون

$$د ب ط : د ب = د ب : د م$$

$$\therefore د ب ط \times د = د م \times د = د ز$$

مسائل

(١) اذا علمت بورة قطع ناقص وطول المحور الاكبر ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للركز هو محيط دائرة

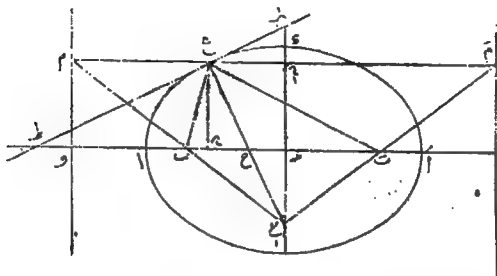
(٢) معلوم بورة قطع ناقص والدليل المناظر لها ومعلوم أيضا أن مستقيما معلوما يمس المنحنى المذكور والمطلوب إيجاد البورة الثانية

(٣) المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمركز قطع ناقص معلوم بورته ويمس مستقيما معلوما في نقطة معلومة

(٤) اذا فرض أن عدة قطاعات ناقصة لها محورا كبر مشترك ورسم مستقيم عمودى على هذا المحور ليقطع المنحنيات المذكورة فالمطلوب البرهنة على أن المماسات المرسومة من جميع نقط التقاطع تتقاطع في نقطة على المحور الأكبر

(٥) اذا فرض أن المماس لقطع ناقص في نقطة منه مثل ع والاحداثى الرأسى لهذه النقطة يقطعان المحور الاكبر ا ب في نقطتى ط ك على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن د ا أصغر من ا ط

٥٧ — النظرية الخامسة — اذا كان العمودى على منحنى قطع ناقص في نقطة منه مثل ع يقطع المحور الاكبر والاصغر فى نقطتى ح ك على التناظر تكون النسبة ع ح : ع ك ثابتة وكذلك اذا رسم ع د ك ع ح عمودين على المحور الاكبر والمحور الاصغر على التناظر تكون النسبتان ح د : ح ك ع ح : ح ك ثابتتين



$\bar{A}B : \bar{C}D = \bar{A}B : \bar{A}D = \bar{A}B : \bar{C}D$ فيكون $\bar{C}D : \bar{C}B$
 $\bar{A}B : \bar{C}D = \bar{A}D : \bar{C}B \therefore$
 $\bar{A}B : \bar{C}D =$

وحيث أن يكون ϵ ϵ منصفاً للزاوية β ϵ β وإذا فليزم أن يكون هو العمودى فى نقطة ϵ [بمقتضى النظرية الثانية]

ثم ينتج من تشابه المثلثين أن

$$\begin{aligned} 1\bar{1} : 2\bar{2} &= 1\bar{1} : 2\bar{2} = 1\bar{1} : 2\bar{2} \\ 1\bar{1} : 2\bar{2} &= 1\bar{1} : 2\bar{2} = 1\bar{1} : 2\bar{2} \end{aligned}$$

ثم ان $\frac{22}{11} : \frac{22}{11} = 22 : 22 = 22 : 22$

$$21:20 =$$

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \mu \right)$$

وكذلك $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$

$$J_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} =$$

٥٨ - النظرية السادسة - محيط الدائرة المار بـ P قطع ناقص ونقطة T على المنحنى مثل نقطة E يمر بنقط تقاطع المحور الأصغر مع المماس والعمودي في نقطة E المذكورة

وللبرهنة على ذلك نفرض أن محيط الدائرة Γ ϵ Γ يقطع المحور الأصغر في نقطتين Γ ϵ Γ فواضح أن هاتين النقطتين واقعتان في جهتين متقابلتين بالنسبة للمستقيم Γ ϵ Γ ولنفرض أن نقطتي ϵ Γ في جهتين متقابلتين بالنسبة للمستقيم Γ ϵ Γ

فحيث أن المستقيم Γ ϵ منتصف للمستقيم Δ وعمود عليه فهو إذا قطر
للدائرة والقوسان Δ ϵ Γ Δ يلزم أن يكونا متساويين وبناء عليه
فالزاويتان Δ ϵ Γ Δ متساويتان ويستنتج من ذلك أن ϵ Δ هو
العمودي في نقطة ϵ وحيث أن Γ Δ قطر للدائرة فتكون الزاوية Γ Δ ϵ Δ
زاوية قائمة ويكون إذا ϵ Γ هو المماس للنحنى في نقطة ϵ

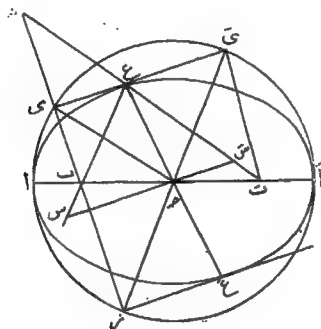
نتيجة - حيث ان التقط $\frac{6}{\sqrt{6}}$ واقعة على محيط دائرة
فكون $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

وكذلك حيث ان المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان

فیکون $a : b = c : d$: ط

وعليه يكون $\bar{C} = C \cup C^c = A \cup B \cup C^c = A \cup B$

٥٩ — النظرية السابعة — المطلوب البرهنة على أن موقعي العمودين
النازليين من بورتى قطع ناقص على مماس له في أى نقطة منه واقعان على محيط
دائرة ثابتة وأن نصف المحور الاصغر وسط متناسب بين طولى العمودين
للبرهنة على ذلك نفرض B B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} B_{18} B_{19} B_{20} B_{21} B_{22} B_{23} B_{24} B_{25} B_{26} B_{27} B_{28} B_{29} B_{30} B_{31} B_{32} B_{33} B_{34} B_{35} B_{36} B_{37} B_{38} B_{39} B_{40} B_{41} B_{42} B_{43} B_{44} B_{45} B_{46} B_{47} B_{48} B_{49} B_{50} B_{51} B_{52} B_{53} B_{54} B_{55} B_{56} B_{57} B_{58} B_{59} B_{60} B_{61} B_{62} B_{63} B_{64} B_{65} B_{66} B_{67} B_{68} B_{69} B_{70} B_{71} B_{72} B_{73} B_{74} B_{75} B_{76} B_{77} B_{78} B_{79} B_{80} B_{81} B_{82} B_{83} B_{84} B_{85} B_{86} B_{87} B_{88} B_{89} B_{90} B_{91} B_{92} B_{93} B_{94} B_{95} B_{96} B_{97} B_{98} B_{99} B_{100} B_{101} B_{102} B_{103} B_{104} B_{105} B_{106} B_{107} B_{108} B_{109} B_{110} B_{111} B_{112} B_{113} B_{114} B_{115} B_{116} B_{117} B_{118} B_{119} B_{120} B_{121} B_{122} B_{123} B_{124} B_{125} B_{126} B_{127} B_{128} B_{129} B_{130} B_{131} B_{132} B_{133} B_{134} B_{135} B_{136} B_{137} B_{138} B_{139} B_{140} B_{141} B_{142} B_{143} B_{144} B_{145} B_{146} B_{147} B_{148} B_{149} B_{150} B_{151} B_{152} B_{153} B_{154} B_{155} B_{156} B_{157} B_{158} B_{159} B_{160} B_{161} B_{162} B_{163} B_{164} B_{165} B_{166} B_{167} B_{168} B_{169} B_{170} B_{171} B_{172} B_{173} B_{174} B_{175} B_{176} B_{177} B_{178} B_{179} B_{180} B_{181} B_{182} B_{183} B_{184} B_{185} B_{186} B_{187} B_{188} B_{189} B_{190} B_{191} B_{192} B_{193} B_{194} B_{195} B_{196} B_{197} B_{198} B_{199} B_{200} B_{201} B_{202} B_{203} B_{204} B_{205} B_{206} B_{207} B_{208} B_{209} B_{210} B_{211} B_{212} B_{213} B_{214} B_{215} B_{216} B_{217} B_{218} B_{219} B_{220} B_{221} B_{222} B_{223} B_{224} B_{225} B_{226} B_{227} B_{228} B_{229} B_{230} B_{231} B_{232} B_{233} B_{234} B_{235} B_{236} B_{237} B_{238} B_{239} B_{240} B_{241} B_{242} B_{243} B_{244} B_{245} B_{246} B_{247} B_{248} B_{249} B_{250} B_{251} B_{252} B_{253} B_{254} B_{255} B_{256} B_{257} B_{258} B_{259} B_{260} B_{261} B_{262} B_{263} B_{264} B_{265} B_{266} B_{267} B_{268} B_{269} B_{270} B_{271} B_{272} B_{273} B_{274} B_{275} B_{276} B_{277} B_{278} B_{279} B_{280} B_{281} B_{282} B_{283} B_{284} B_{285} B_{286} B_{287} B_{288} B_{289} B_{290} B_{291} B_{292} B_{293} B_{294} B_{295} B_{296} B_{297} B_{298} B_{299} B_{300} B_{301} B_{302} B_{303} B_{304} B_{305} B_{306} B_{307} B_{308} B_{309} B_{310} B_{311} B_{312} B_{313} B_{314} B_{315} B_{316} B_{317} B_{318} B_{319} B_{320} B_{321} B_{322} B_{323} B_{324} B_{325} B_{326} B_{327} B_{328} B_{329} B_{330} B_{331} B_{332} B_{333} B_{334} B_{335} B_{336} B_{337} B_{338} B_{339} B_{340} B_{341} B_{342} B_{343} B_{344} B_{345} B_{346} B_{347} B_{348} B_{349} B_{350} B_{351} B_{352} B_{353} B_{354} B_{355} B_{356} B_{357} B_{358} B_{359} B_{360} B_{361} B_{362} B_{363} B_{364} B_{365} B_{366} B_{367} B_{368} B_{369} B_{370} B_{371} B_{372} B_{373} B_{374} B_{375} B_{376} B_{377} B_{378} B_{379} B_{380} B_{381} B_{382} B_{383} B_{384} B_{385} B_{386} B_{387} B_{388} B_{389} B_{390} B_{391} B_{392} B_{393} B_{394} B_{395} B_{396} B_{397} B_{398} B_{399} B_{400} B_{401} B_{402} B_{403} B_{404} B_{405} B_{406} B_{407} B_{408} B_{409} B_{410} B_{411} $B_{412}</$



فیکون $د ب ع = د ب ع = د ب ع = د ب ع$
 وكذلك $د ب ع =$ زاوية قائمة $= د ب ع$
 والضلع $ع$ مشترك بين المثلثين $ب ع ع$ و $ک ه ع$
 وحينئذ فالمثلثان $ب ع ع$ و $ک ه ع$ متساويان ومنه ينتج
 $ب ع = ک ه$ و $ع ب = ع ه$
 وعليه يكون $ب ه = ب ع + ع ه = ب ع + ع ب = ١٨٢$

ولكن حيث أن $ب هـ = ب ز = ب ٦ = ب ٧$

فيكون $ح$ موازيا للمستقيم $ب ع$ ويكون

$$١ هـ = ١ ز = ١ ٦ = ١ ٧$$

وعليه يكون $ح = ز = ١$ وحينئذ تكون نقطة $ع$ واقعة على محيط الدائرة التي مركزها $ح$ ونصف قطرها ١

ويمكن البرهنة بمثل هذه الطريقة على أن $ح$ مواز للمستقيم $ب ع$ ومساو للمستقيم ١

ومن ذلك يتضح أن موقعي العمودين النازلين من بورتي قطع ناقص على أي مماس له واقعان على محيط دائرة قطرها المحور الأكبر

تعريف — الدائرة التي قطرها المحور الأكبر لقطع ناقص تسمى (الدائرة الأصلية أو المساعدة)

لنمد $ع$ على استقامته ليقطع الدائرة الأصلية في نقطة أخرى كنقطة $ز$ بحيث أن $ع$ قطر للدائرة الأصلية فالزاوية $ع$ قائمة وبما أن الزاوية $ع$ قائمة أيضا فيكون $ع$ خطا مستقيما

وحيث أن $ح ز = ح ٦ = ح ٧ = ح ٨ = ح ٩ = ح ١٠ = ح ١١ = ح ١٢$ فيكون المثلثان $ب ح ز$ و $ب ح ٦$ متساويين وبناء عليه $ب ع = ب ز$ وحينئذ $ب ع = ب ٦ = ب ٧ = ب ٨ = ب ٩ = ب ١٠ = ب ١١ = ب ١٢$

نتيجة ١ — إذا رسم مستقيم من نقطة $ح$ موازيا للمماس في نقطة $ع$ ليقطع $ع ٦$ أو امتدادهما في نقطتي $س ٦$ و $س ٧$ على التناظر يكون $ع س = ع س = ١$

وذلك لأن $ح س$ مواز للمستقيم $ع$ والمستقيم $ح$ مواز للمستقيم $ع س$ وحينئذ $ع س = ح س = ١$ وكذلك يكون $ع س = ح س = ١$

نتيجة ٢ — المستطيل المكون من العمودين النازلين من بورة قطع ناقص على مماسين له متوازيين ثابت

وعكس النظرية السابقة ذو أهمية وهو إذا كانت ب نقطة داخل محيط دائرة معلومة ووصلناها بأى نقطة مثل ع على المحيط فإن المستقيم المرسوم من ع عمودا على ب يكون دائما مماسا لقطع ناقص احدى بورتيه نقطة ب والدائرة الاصلية له هي الدائرة المعلومة

مسائل

(١) المطلوب البرهنة على أن جزء المحور الاصغر لقطع ناقص المحصور بين المماس والعمودى فى أى نقطة على المنحنى لا يمكن أن يكون أصغر من البعد بين البورتين

(٢) المطلوب البرهنة على أن ع ع ممس الدائرة ب ع م

(٣) المطلوب البرهنة على أن الدائرتين ع ب م و ع ب م مماستان

(٤) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ع ب م و ع ب م متشابهان وأن النسبة ب م : ع م ثابتة

(٥) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ع ب م و ع ب م متشابهان وأن ع م . ع ب = ع م . ع ب

(٦) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ع ب م و ع ب م متشابهان وأن ب م . ع ب = ع م . ع ب

(٧) المطلوب رسم مماس لقطع ناقص مواز لمستقيم معلوم

(٨) المطلوب إيجاد بورتى قطع ناقص اذا علم المماس له فى نقطة معلومة وعلمت الدائرة الاصلية

(١٠) المطلوب رسم قطع ناقص اذا علمت ثلاثة مماسات واحدى البورتين

(١٢) اذا رسم مماس لقطع ناقص يقطع المماسين له في تقطبي الرأس

في ط ٦ ط فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة التي قطرها ط ط تمر بالبورتين

(۱۳) المطلوب البرهنة على أن y z x متوازي أضلاع

(١٤) المطلوب البرهنة على أن γ و δ يتقاطعان في منتصف EC

(١٥) المطلوب البرهنة على أن الدائرة γ هي تمر بموقع الاحداثي الرأسى

لنقطة ع

(١٦) المطلوب البرهنة على أن $\angle \text{ع د هـ}$ منصف للزاوية ي د ي°

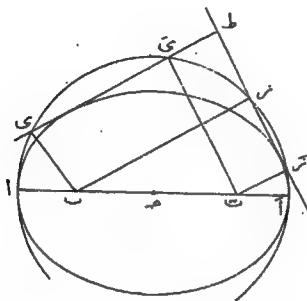
(١٧) إذا رسم من بورة قطع ناقص ب ي ٦ ب ٧ عمودين على المماس سـ هـ والعمودى على المنحنى فى أى نقطة منه فال المطلوب البرهنة على أن ي ٦ يمر بمركز القطع الناقص

(۱۸) اذا فرض قطع ناقص ذو اختلاف مركزي معلوم وبمس مستقيما معلوما فال المطلوب البرهنة على أن مركزه واقع على محيط دائرة ثابتة

(١٩) إذا فرض قطعان ناقصان لهما بؤرة مشتركة وكان المحور الأصفر لأحدهما يساوي المحور الأصفر للثاني فالمطلوب البرهنة على أن مماساتهما المشتركة متوازية

(٢٠) إذا رسم لقطع ناقص زوجان من المماسات المتوازية ورسمت موازيات لها من احدى البورتين فالمطلوب البرهنة على أن النقط الأربعة التي تتقاطع فيها الموازيات المرسومة من البورة مع المماسات المذكورة واقعة على محيط دائرة

٦٠ - النظرية الثامنة - نقطة تقاطع مماسين متعامدين لقطع ناقص واقعة على محيط دائرة ثابتة



لنفرض ط نقطة تقاطع الماسين المتعامدين ثم نرمس ب ي ك ب ي
عمودين على أحد الماسين ونرمس ب ن د ن ع عمودين على الماس الآخر
فيكون $\angle ب ن د = \angle ب ي ك = \angle د ن ع$

وحيث أن α و β واقعتان على محيط الدائرة الأصلية فيكون مربع
المماس للدائرة الأصلية من نقطة α مساويا الى $\alpha\beta$

وحيث $\bar{s} = \bar{a} - \bar{a}^*$ يكون

وبناء عليه فنقطة ط واقعة على محيط الدائرة التي مربع نصف قطرها

مسوا الى ا ح + د ح

تعريف - الدائرة التي هي المحل الهندسي لنقطة تقاطع المماسات المتعامدة لقطع ناقص تسمى (دائرة الاستدلال)

(مسألة ١) لا يمكن أن دائرة الاستدلال تقطع ناقص تقطع الدليل في نقط
حقيقية

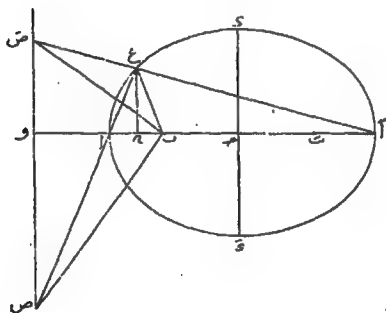
(مسألة ٢) طول المماس لدائرة الاستدلال تقطع ناقص المرسوم من نقطة
على الدليل يساوى بعد هذه النقطة عن البورة

(مسألة ٣) المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمركز قطع ناقص معلوم طول
كل من محوريه ويمس مستقيمين متعامدين ثابتين

٦١ — النظرية التاسعة — إذا رسم ع د عمودا على المحور الأكبر
٦١ تقطع ناقص من نقطة ما على المنحنى مثل نقطة ع فان النسبة

$$ع : د = ١ : ٥$$

تكون ثابتة



وللبرهنة على ذلك نصل ع ا ك ع ا ونمدهما على استقامتهما ليقطعا أحد
الدليلين في نقطتي ص ص على التناظر ثم نصل ص ص ك ص بالبورة ب
المنظرة لهذا الدليل

فيكون صه ب منصفاً للزاوية ع ب ا كه صه ب منصفاً للزاوية ع ب ا [بند ١٠] وحينئذ يكون صه ب كه صه ب متعامدين وبناء عليه يحدث

$$\overline{\text{صه و}} = \overline{\text{وه ب}}$$

وينتج من تشابه المثلثات أن

$$\text{ع د} : \text{ه ا} = \text{ه ب} : \text{وه و} : \text{وا}$$

$$\text{ع د} : \text{ه ا} = \text{وه و} : \text{وا} \quad \text{وكذلك}$$

$$\therefore \text{ع د} : \text{ه ا} = \text{ه ب} : \text{وه و} : \text{وا} : \text{وا}$$

$$\overline{\text{وه ب}} : \overline{\text{وا}} = \overline{\text{وا}} : \overline{\text{وا}}$$

ومن ذلك يتضح ان النسبة $\text{ع د} : \text{ه ا} = \text{ه ب} : \text{وه و} : \text{وا}$ تكون ثابتة مهما اختلف وضع نقطة ع واذا فرضت نقطة ع في احدى نهايتي المحور الأصغر يصير ع د هو الخط د ه ويصير ه ا هو ا د أى أن النسبة الثابتة يلزم أن تكون مساوية للنسبة $\text{د ه} : \text{ا د}$

$$\text{وحيثئذ يكون ع د} : \text{ه ا} = \text{ه ب} : \text{وه و} : \text{وا} = \text{د ه} : \text{ا د}$$

نتيجة— اذا فرض أن ع د عمود على المحور الأصغر من نقطة ع يكون

$$\text{د ه} = \text{ع د} \quad \text{و يكون ع د} = \text{د ه}$$

$$\text{و يكون أيضا د ه} = \text{ه ا} = \text{ه ب} = \text{ا د} - \text{ع د} = \text{ا د} - \text{ع د}$$

$$\text{وبناء عليه يكون د ه} : \text{ه ا} = \text{ع د} : \text{د ه} = \text{د ه} : \text{ا د}$$

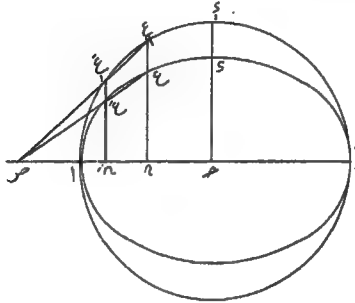
$$\text{أو د ه} : \text{ا د} = \text{د ه} : \text{ع د} = \text{ا د} : \text{د ه}$$

$$\therefore \text{د ه} : \text{ا د} = \text{د ه} : \text{ع د} = \text{ا د} : \text{د ه}$$

$$\text{وبناء عليه يكون ع د} : \text{د ه} = \text{د ه} : \text{ا د} = \text{ا د} : \text{د ه}$$

٦٢ — النظرية العاشرة — اذا فرض أن $ع$ هو الاحداثى الرأسى
لنقطة على منحنى قطع ناقص مثل نقطة $ع$ ثم مّد المستقيم $ع$ على
استقامته ليقطع الدائرة الأصلية في نقطة $ع$ يكون

$$ع : ع = ع : ع = د : د = ا : ا$$



لأنه حيث أن $ع : ع = ا : ا = د : د = ع : ع$

$$و \quad ع : ع = ع : ع = د : د = ا : ا$$

$$د : د = ا : ا$$

فيصبح أن $ع : ع = ع : ع = د : د = ا : ا$

$$أو \quad ع : ع = ع : ع = د : د = ا : ا$$

اذا مّد الاحداثى الرأسى لنقطة $ع$ من القطع الناقص على استقامته ليقطع
الدائرة الأصلية في نقطة $ع$ تسمى التقطعان $ع$ (النقطتين المتناظرتين)
المماسات لقطع ناقص والدائرة الأصلية من نقطتين متناظرتين يتقاطعان
على المحور الأكبر

للبرهنة على ذلك نفرض ع ٦ ع نقطتين ايا كانا على منحنى قطع ناقص ونفرض ع ٦ ع النقطتين المناظرتين لهما على محيط الدائرة الأصلية ثم نصل ع ع فيقطع المحور الأكبر في نقطة صـ

فيكون $صـ : ع = ع : ع$: ع

$$ع : ع = ع : ع$$

وينتج من ذلك أن صـ ع ع خط مستقيم

ثم نتصور تحرك ع ع في جهة ع ع حتى ينطبق عليه

فينتج أن الماسين في تقطعي ع ٦ ع يتقاطعان على المحور الأكبر

وتسمى الدائرة التي قطرها المحور الأصغر (الدائرة الأصلية الصغرى)

وليس لخواص هذه الدائرة أهمية عظيمة

وإذا فرض أن العمود ع ٦ على المحور الأصغر يقطع الدائرة الأصلية الصغرى في نقطة ن يستنتج من نتيجة النظرية التاسعة أن

$$ع : ن = ن : ع = ١ : ١$$

٦٣ - إذا رسم مستقيم من نقطة ع موازيا للمستقيم ع ليقطع المحور

الأكبر والمحور الأصغر في نقطتي هـ ٦ صـ على التناظر يكون ع ٦ صـ ع

متوازي أضلاع وإذا يكون ع صـ ع = ع ٦ = ١ وكذلك يكون

ع هـ : ع ٦ = ع ٦ : ع ٦ أو أن ع هـ : ع ٦ = ع ٦ : ع ٦

= ع ٦ : ع ٦ وبناء عليه يكون ع هـ = ع ٦ فحينئذ تكون الخطوط

ع هـ ٦ ع صـ ٦ هـ صـ كلها ذات طول ثابت

(وبالعكس) إذا رسم مستقيم هـ صـ له طول ثابت وكانت نهايته على

مستقيمين ثابتين ومتعامدين فإن أى نقطة أخرى ثابتة على الخط أو على

امتداده كنقطة ع مثلا ترسم قطعنا ناقصا نصف محوريه مساويان للمستقيمين

صـ ع ٦ هـ ع على التناظر وهذا هو أساس برجل القطع الناقص

مسائل

(١) اذا فرض أن u و v وتر من جملة أوتار متوازية في دائرة وفرضت نقطة e على u بحيث يكون $u : e : v$ ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة e هو قطع ناقص

(٢) المطلوب ايجاد بورتى قطع ناقص اذا علمت نهايتا محوره الأكبر ونقطته على المنحنى

(٣) اذا فرض أن e هو الاحداثى الرأسى لأى نقطة على منحنى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للمستقيم ue هو قطع ناقص آخر

(٤) اذا فرض أن e أى وتر فى قطع ناقص مواز لأحد المحورين وفرضت نقطة u على الوتر e بحيث يكون $e : u : v$ مساويا للنسبة معلومة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة u هو قطع ناقص آخر

(٥) اذا فرضت u نقطة ما على محيط دائرة معلومة ثم رسم u عمودا على مماس ثابت لهذه الدائرة من نقطة u وكانت نقطة e منتصف الخط uu فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة e هو قطع ناقص

٦٤ — النظرية الحادية عشرة — اذا رسم $ط$ و $ك$ و $ط$ بمماسين لقطع ناقص بورتاه $ب$ و $ك$ فالزاويتان $ب ط و$ و $ك ط و$ متساويتان

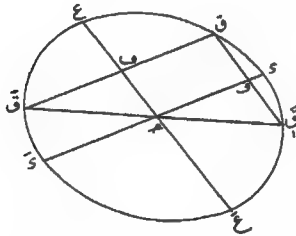
والبرهنة على ذلك تنزل من البورتين العمودين $ب$ و $ك$ على $ط$ ونرسم $ب$ و $ك$ عمودين على $ط$ ثم نصل $ب$ و $ك$ ونرى فتكون $د ب و = د ك و$ لأن كلا منهما مكمل للزاوية $ط و ك$

خواص الأقطار

٦٥ — قد تقدم البرهان على أن المحل الهندسي للنقط المنصفة لجملة أوتار متوازية في قطاع مخروطي هو مستقيم مار بمركز القطع يسمى قطر المنحنى وتقدم البرهان أيضا على أن المماسين في نهايتي أى وترين تقاطعان على للقطر المنصف لهذا الوتر

وواضح إذا أن أى مستقيم مرسوم من مركز القطع الناقص يلزم أن يقطع المنحنى في نقطتين حقيقتين وتقدم البرهان في بند ١٨ على أن المماسين في نهايتي أى قطر يكونان موازيين للأوتار التي ينصفها هذا القطر

٦٦ — النظرية الثانية عشرة — إذا كان القطر $ع ع$ منصفا لكل أوتار القطع الناقص الموازية للقطر $د د$ فيكون القطر $د د$ منصفا لكل أوتار القطع الناقص الموازية للقطر $ع ع$



ليكن $د د$ وتر لقطع ناقص موازيا للقطر $د د$ فتكون نقطة $ف$ المنصفة للوتر $د د$ واقعة على $ع ع$ ثم نصل $د د$ ونعده على استقامته ليقطع المنحنى في نقطة أخرى كنقطة $ب$ ثم نصل $د ب$ فيقطع $د د$ في $و$

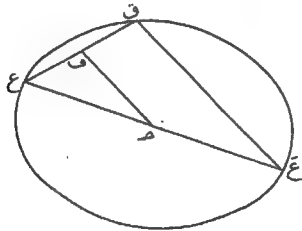
وحيث أن $ف$ منصفة للمستقيم $ق$ و $نقطة$ $ح$ منصفة للمستقيم $ق$ $ف$
 فينتج أن $ق$ $ف$ مواز للقطر $ع$ $ح$

وحيث أن $ح$ مواز للمستقيم $ق$ ومنصف للمستقيم $ق$ $ف$ فيلزم أن
 يكون $ح$ منصفاً للمستقيم $ق$ $ف$

فيتضح إذا أن $ح$ منصف للوتر $ق$ $ف$ الموازي للقطر $ع$ $ح$ ولا بد
 إذا أن يكون منصفاً لكل وتر مواز للقطر $ع$ $ح$

تعريف — إذا كانت قطران من أقطار القطاع المخروطي في وضع
 مخصوص بحيث أن كلا منهما ينصف جميع الأوتار الموازية للقطر الآخر
 يسمى القطران (مزاوجين) لبعضهما

٦٧ — النظرية الثالثة عشرة — المستقيمان الواصلان بين أى نقطة
 على منحنى قطع ناقص وبين نهايتى أى قطره يكونان موازيين للقطرين
 المتزاوجين



لنفرض $ع$ $ح$ قطرا من أقطار القطع الناقص ونفرض $ق$ نقطة ما على
 المنحنى

ثم نصل $ق$ $ع$ $ق$ $ح$ وننصف $ق$ $ع$ بنقطة $ف$

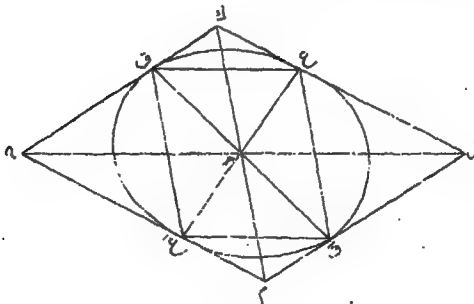
فحيث ان F هي النقطة المنصفة للستقيم EC و G > النقطة المنصفة للستقيم EC فيكون GF موازيا للستقيم EC .
 فحينئذ يكون القطر المزاوج للستقيم EC و موازيا للستقيم EC وهذا ما أردنا اثباته

وبالعكس اذا فرضنا EC و G ثلاث نقط على منحنى قطع ناقص بحيث يكون EC و G موازين لقطرين متزاوجين يكون EC و G قطرا للقطع الناقص

تعريف — المستقيمان الواصلان بين أى نقطة على منحنى قطع ناقص وبين نهايتي قطريسميان (الوترين المكملين)

٦٨ — النظرية الرابعة عشرة — اذا كانت أضلاع متوازي أضلاع مماسة لمنحنى قطع ناقص تكون اقطار متوازي الأضلاع المذكور أقطارا متزاوجة في القطع الناقص

للبهنة على ذلك نفرض L و M متوازي أضلاع أضلاعه مماسة لقطع ناقص ولنفرض EC و G نقطتي تماس المماسين متوازيين ونقطتي EC و G نقطتي تماس الضلعين الآخرين



فحيث أن المماسين للقطع الناقص في نقطتي ع ك ع متوازيان فيكون
المستقيم ع ح ع قطر للقطع الناقص المذكور وكذلك يكون ح و ع قطر له
وحيث يكون الشكل ع و ع و ع متوازي أضلاع وإذا فالضلعان
ع و ك ع و ع متوازيان

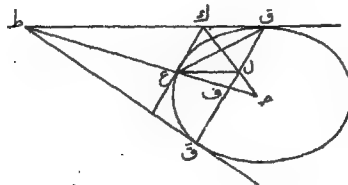
وحيث إن ح ك منصف للوتر ع و وإذا فهو منتصف أيضا للوتر ع و
الموازي له فيكون ك ح م خطا مستقيما ومن الواضح أنه مواز للمستقيم ع و
أو للمستقيم و ع

وبمثل ذلك يتضح أن ل ح م خط مستقيم وأن ح ل منصف للوتر ع و
الموازي للمستقيم ك ح م

وحيث فالمستقيمان ك م ل ح قطران متوازيان في القطع الناقص
(وبالعكس) إذا رسم قطران متوازيان في قطع ناقص وقطعهما مماس في
نقطتي ك ل فالمماسان الآخران للقطع الناقص في نقطتي ك ل متوازيان

٦٩ — النظرية الخامسة عشرة — إذا فرض أن مماسين لقطع ناقص
في نهايتي وتر كالوتر و ع يتقاطعان في نقطة ط وفرض أن القطر ح ط
يقطع و ع في نقطة ف ويقطع المنحنى في نقطة ع يكون

$$ح ف . ح ط = ح ع$$



لأنه واضح من بند ١٨ أن المماس في نقطة ع مواز للمستقيم ن ن فنفرض أن هذا المماس يقطع ط ن في نقطة ك

ثم نرمس ع ل موازيا للمستقيم ط ن فيقطع ن ن في نقطة ل
وحيث أن ع ك ن ل متوازي أضلاع فيكون ك ل منصفاً للمستقيم ع ن
ولكن من المعلوم من بند ١٨ أن ك ح منصف للمستقيم ع ن فيستنتج أن ك ل ح خط مستقيم

وحيث أن ل ف مواز للمستقيم ك ع

فيكون ح ف : ح ع = ح ل : ح ك

وحيث أن ع ل مواز للمستقيم ط ن

فيكون ح ل : ح ك = ح ع : ح ط

وحيث أن يكون ح ف : ح ع = ح ع : ح ط

أو ح ف . ح ط = ح ع^٢ *

وبلاحظ أن النظرية الثالثة والنظرية الرابعة هما حالتان خاصتان لهذه النظرية العامة

٧٠ — النظرية السادسة عشرة — إذا كان المماس في نقطة ع لقطع

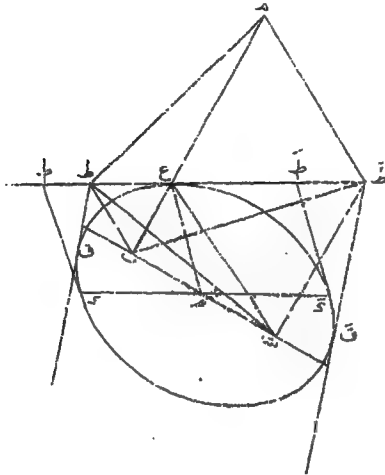
ناقص بورتاه ب و ن يقطعه مماسان آخران متوازيان في نقطتي ط و ط^٢
وكان ح د هو نصف القطر المزاوج للمستقيم ح ع يكون

$$ط ع . ع ط^٢ = ب ع . ب ن ع = ح ع = ح د^٢$$

لنفرض ن و ن^٢ نقطتي تماس المماسين المتوازيين ثم نصل ب ط و ب^٢ ط^٢
و ب ط^٢ و ب^٢ ط^٢ ونمذ ب ع على استقامته لنقطة ه بحيث يكون ع ه
= ع ب^٢ ثم نصل ه ب ط و ه ط^٢

* أول من أقام هذا البرهان الدكتور ك. تايلر

وحيث ان ط ط^٢ منصف للزاوية ه ع ت والمستقيم ع ه = ع ت



فيكون ط ه = ط ت = ط ه ط^٢ = ت ط^٢ ويحدث اذا أن المثلثين
ه ط ط^٢ و ت ط ط^٢ متساويان وعليه يكون
د ه ط ط^٢ = د ط ط^٢

= د ب ط ق [بمقتضى النظرية الحادية عشرة]
∴ د ه ط ب = د ب ط ط^٢
وبالمثل د ه ط ب = د ب ط ط^٢

وحيث د ه ط ب + د ه ط ب = د ب ط ط^٢ + د ب ط ط^٢
= زاويتين قائمتين لان ط ق و ط ب متوازيان
فيتضح اذا أن النقط ب و ط ه و ط^٢ واقعة على محيط دائرة وحيث ان يكون
ط ع . ع ط^٢ = ب ع . ع ه = ت ع . ع ت

ثم نفرض أن المماس في نقطة ع يقطعه المماسان الموازيان للمستقيم ح ع في نقطتي ط_١ ط_٢

$$\text{فيحدث أن } ب \cdot ع \cdot ط = ع \cdot ط_1 \cdot ع \cdot ط_2$$

$$= ح \cdot د لأن ط_1 ط_2 = ع \cdot ط = ح \cdot د$$

$$\text{وحينئذ يكون } ط \cdot ع \cdot ط = ع \cdot ط \cdot ع \cdot ب \cdot ع = ح \cdot د$$

نتيجة — حيث أن أقطار متوازي الأضلاع الذي تماس أضلاعه منحني قطع ناقص هي أقطار متزاوجة فيمكن وضع هذه النظرية في المنطوق الآتي
إذا كان المماس لقطع ناقص في نقطة ع يقطعه قطران متزاوجان في نقطتي

$$ط_1 ط_2 يكون ط \cdot ع \cdot ط = ع \cdot ط \cdot ع \cdot ب \cdot ع = ح \cdot د$$

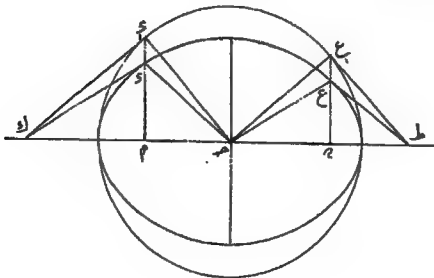
ويجب ملاحظة أنه حيث أن الزاويتين ط ب ط ط ط ه ط متكاملتان فالزاويتان ط ب ط ط ط ب ط متكاملتان أيضا

وحينئذ فجزء أى مماس لقطع ناقص المحصور بين تماسين متوازيين أو بين

قطرين متزاوجين يقابل زاويتين متكاملتين رأسهما البورتان

٧١ — النظرية السابعة عشرة — مجموع مربعي القطرين المتزاوجين

في قطع ناقص ثابت



وللبرهنة على ذلك نفرض $\angle ع ٦ \angle د$ نصفى قطرين متوازيين في قطع ناقص
ثم نرسم مماسين في نقطتي $ع ٦$ فيقطعان المحور الأكبر في نقطتي $ط ٦ ك$
على التناظر ثم نرسم $\angle د ٦ ع$ عمودين على المحور الأكبر فيكون $\angle ع ط$
موازيًا للمستقيم $\angle د$ ويكون $\angle ك$ موازيًا للمستقيم $\angle ع$ ثم نجد $\angle د ٦ ع ٦ م$
ليقطعا الدائرة الأصلية في $ع ٦ ٦$ على التناظر

فحيث ان $\angle د ٦ ع ٦ ط = ا = ٢٦$ فيستنتج أن $\angle ع ط$ يلزم أن
يكون مماسًا للدائرة الأصلية في نقطة ٢٦ وبالمثل يكون $\angle ٢٦$ مماسًا للدائرة
الأصلية في نقطة ٢٦

وحيث ان $\angle ع ط$ مواز للمستقيم $\angle د$ فيكون المثلثان القائمًا الزاوية $\angle ط د ع$
 $٦ ٦ م$ متشابهين

$$\text{وينتج من تشابههما أن } \angle ط د ع = \angle م د ع = م : ع د$$

$$\angle ع د ٢٦ = \angle م د ٢٦ = م : ع د$$

ويستنتج من ذلك أن المثلثين $\angle ط د ع ٦ ٦ م$ متشابهان وحيث أن
يكون $\angle ٢٦$ موازيًا للمستقيم $\angle ط ع$ ولكن $\angle ط ع$ مماس للدائرة الأصلية وعليه
يكون عمودًا على $\angle ع$

وحيث أن يكون $\angle ع ٦ ٦$ متعامدين ومنه يحدث أن $\angle م د ع = \angle ط د ع$
 $٢٦ م = د ٦ ٦$

$$\text{وحيث ان } \angle د ٦ ع ٦ ط = ا = ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ = ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ + ٢٦$$

$$\text{ولكن } \angle د ٦ ع ٦ ط = ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ = ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ + ٢٦$$

$$\text{و } \angle د ٦ ع ٦ ط = ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ = ٢٦ + ٢٦ + ٢٦ + ٢٦$$

$$\begin{aligned} \text{وبناء عليه حيث ان } \frac{1}{2} \text{ د} &= \frac{1}{2} \text{ م} + \frac{1}{2} \text{ د} = \frac{1}{2} \text{ د} + \frac{1}{2} \text{ د} = \frac{1}{2} \text{ د} = \frac{1}{2} \text{ د} \\ \text{فيكون } \frac{1}{2} \text{ د} &= \frac{1}{2} \text{ م} + \frac{1}{2} \text{ د} \\ \text{واذا } \frac{1}{2} \text{ د} + \frac{1}{2} \text{ د} &= \frac{1}{2} \text{ د} + \frac{1}{2} \text{ د} \end{aligned}$$

ويمكن الوصول الى هذه النتيجة بالطريقة الآتية

$$\begin{aligned} (\text{ب} + \text{ع}) &= (\text{ب} + \text{ع}) \\ \text{ب} + \text{ع} &= \text{ب} + \text{ع} \\ \text{ب} + \text{ع} &= \text{ب} + \text{ع} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{و } \text{ب} + \text{ع} &= \text{ب} + \text{ع} \\ \text{و } \text{ب} + \text{ع} &= \text{ب} + \text{ع} \\ \text{وحينئذ يكون } \text{ب} + \text{ع} &= \text{ب} + \text{ع} \\ \text{:: } \text{ب} + \text{ع} &= \text{ب} + \text{ع} \\ \text{ب} + \text{ع} &= \text{ب} + \text{ع} \end{aligned}$$

مسائل

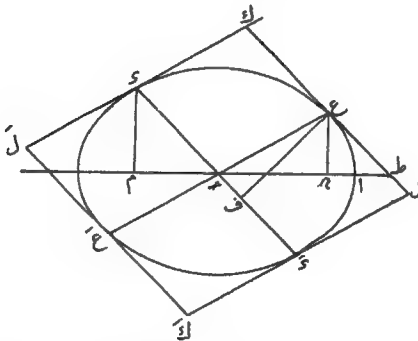
- (١) المطلوب البرهنة على أن قطري القطع الناقص الذين يكونان زاويتين متساويتين مع أحد المحورين هما متساويان
- (٢) المطلوب البرهنة على أن القطرين المتساويين المتزاوجين في قطع ناقص موازيان للمستقيمين الواصلين بين نهاية أحد المحورين وبين نهايتي المحور الآخر
- (٣) إذا رسم متوازي أضلاع في منحنى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن قطري متوازي الأضلاع هما قطران للقطع الناقص

- (٤) إذا كان $\text{ب} + \text{ع} = \text{ب} + \text{ع}$ نصف قطرين متزاوجين في قطع ناقص ورسم مماسان له في نقطتي ب و ع وتقاطعا في نقطة ط ورسم ط ليقطع المنحنى في نقطة ر ويقطع ع في نقطة ف فالمطلوب البرهنة على أن $\text{ب} + \text{ع} = \text{ب} + \text{ع}$ وان $\text{ب} + \text{ع} = \text{ب} + \text{ع}$ ثم إيجاد المجال الهندسية لنقطتي ب و ع للاقطار المتزاوجة المختلفة

(٥) اذا كانت $ع$ و $د$ تقطعتين على منحنى قطع ناقص $ك$ $ح$ $ع$ $د$ تقطعتين مناظرتين لهما على منحنى الدائرة الأصلية ورسم مماسان للقطع الناقص في نقطتي $ع$ و $د$ فتقاطعا في نقطة $ط$ ورسم مماسان للدائرة في نقطتي $ع$ و $د$ فتقاطعا في نقطة $ط$ فالمطلوب البرهنة على أن $ط$ $ط$ عمود على المحور الأكبر للقطع الناقص.

ثم بفرض أن الزاوية $ع$ $ح$ $د$ ثابتة المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة $ط$ هو قطع ناقص

٧٢ — النظرية الثامنة عشرة — مساحة متوازي الأضلاع المكوّن من المماسات لقطع ناقص في نهايات قطرين متراوجين ثابتة



للبرهنة على ذلك نفرض ان المماسات للقطع الناقص في نهايات القطرين المتراوجين $ع$ $ح$ $د$ $س$ تكون متوازي الأضلاع $ك$ $ل$ $ز$ $ج$ ونفرض أن المماس في نقطة $ع$ يقطع المحور الأكبر في نقطة $ط$ ثم نرسم $ع$ $د$ و $م$ و $ن$ عمودين على المحور

فيكون متوازي الأضلاع ك ك = أربعة أمثال متوازي الأضلاع
ك ك = ثمانية أمثال المثلث د ح ع

$$= ٨ د ح ط$$

$$= ٤ د ح ط$$

ويمكن البرهنة كما تقدم في النظرية السابعة عشرة على أن

$$د ح : د ح ط = د ح ط : د ح ط$$

$$\therefore د ح ط : د ح ط = د ح ط : د ح ط$$

$$د ح ط = د ح ط$$

$$د ح ط = د ح ط$$

واذا فتوازي الأضلاع المكون من المماسات لقطع ناقص في نهايات اى
قطرين متوازيين ثابت ومساو الى د ح ط

نتيجة — اذا كان العمودى فى نقطة ع يقطع القطر المزاوج فى نقطة ف

$$يكون ع ف = د ح ط$$

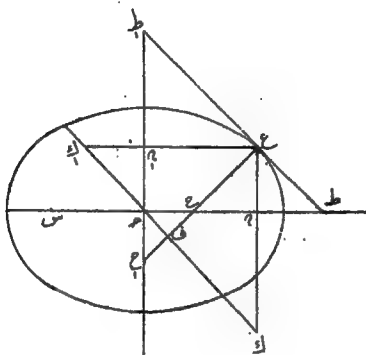
٧٣ — النظرية التاسعة عشرة — اذا كان العمودى على منحنى

قطع ناقص فى اى نقطة عليه كنقطة ع يقطع المحور الأكبر والمحور الأصغر
فى نقطتى د ح ط على التناظر ويقطع القطر المزاوج للمستقيم د ح ط فى نقطة ف
يكون ع ف = د ح ط ويكون ع ف = د ح ط

للبرهنة على ذلك نفرض ان المماس فى نقطة ع يقطع المحور الأكبر والمحور
الأصغر فى نقطتى د ح ط على التناظر

ثم نرمس د ح ط عمودين على المحورين ونمدّهما على استقامتهما
ليقطعما القطر المزاوج فى نقطتى ك ل على التناظر

وحيث ان الزاويتين التي رأسهما د و ف قائمتان فيمكن رسم دائرة حول الشكل ع ف ك د



$$\therefore ع ف . ع د = ع د . ع ك$$

$$د د = د ط . د ك \text{ لأن } د ع = د ك \text{ لك } ع = د ط$$

$$د د =$$

وحيث ان الزاويتين ع ف ك د و ع د ك ف قائمتان فيمكن رسم دائرة حول الشكل ع ف ك د

$$\therefore ع ف . ع د = ع د . ع ك$$

$$د د = د ط . د ك \text{ لأن } د د = د ط \text{ لك } د = ع ك$$

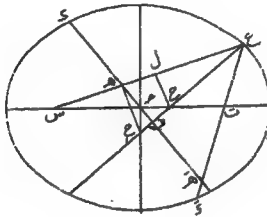
وحيث ان ع ف د د = ا د د [بمقتضى النظرية الثامنة عشرة]

$$\text{فينتج مما تقدم أن } ع د : د د = ا د : ا د$$

$$\text{و } ع د : د د = ا د : ا د$$

$$\text{و } ع د : د د = ا د : ا د$$

٧٤ - إذا فرض أن ب ع يقطع د في نقطة هـ فمن المعلوم أن ع هـ = د ا وحينئذ يكون ع هـ = ع ف . ع د ومن ذلك يستنتج أن الزاوية ع هـ ب زاوية قائمة



وكذلك إذا كان ع ل عمودا على ب ع تكون النقطة ل ع ف د هـ واقعة على محيط دائرة وحينئذ يكون ع ل . ع هـ = ع ف . ع د أعني أن ع ل . ا د = ك ج أي أن ع ل يساوي نصف الوتر البورى العمودى وإذا يكون مسقطا ع ع د على البعد البورى ب ع مساويين على التناظر الى نصف الوتر البورى العمودى ونصف المحور الأكبر

٧٥ - إذا علم قطران متزاوجان في قطع ناقص يمكن إيجاد المحاور والبور وغيرها

ولاثبات ذلك نفرض أن ع د ع د ع د هما المحوران المتزاوجان المعلومان ونفرض أن العمودى في نقطة ع يقطع د د في نقطة ف

ولو فرضنا ع د ع النقطتين المجهولتين اللتين هما محل تقاطع العمودى مع المحورين الأكبر والأصغر على التناظر وكانت و هى النقطة المنصفة للمستقيم ع د يكون

$$ع ف . ع = ع$$

$$ع ف . ع = ع$$

$$ع ف . ع = ع (ع + ع)$$

$$ع ف . ع = ع$$

ومن ذلك يمكننا إيجاد ع

وبعد إيجاد ع ومن الارتباط الآتي

$$ع ف . ع = ع$$

نرسم دائرة مركزها و ونصف قطرها و فتقطع عمودى المنحنى المرسوم من نقطة ع فى تقاطع ع ٦ على المحورين وإذا فقد علم اتجاهها المحورين وعلم طول نصفى المحورين من الارتباطين الآتيين

$$ع ف . ع = ع$$

$$ع ف . ع = ع$$

وحيث علم محورا القطع الناقص فيمكن إيجاد البورتين والدليلين بسهولة

مسائل

(١) المطلوب البرهنة على أن أكبر مساحة لمتوازى أضلاع يمكن رسمه فى منحنى قطع ناقص هى مساحة متوازى الأضلاع الذى تكون أقطاره متوازية

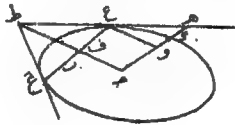
(٢) المطلوب البرهنة على أن متوازى الأضلاع الذى أضلاعه مماسة لقطع ناقص لا يمكن أن تكون مساحته أقل من مساحة متوازى الأضلاع المكوّن من المماسات فى نهايات المحورين

٧٦ - قد تقدم البرهان فى بند ٢٤ على أن النسبة الكائنة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء أى وترين لقطع ناقص متقاطعين وموازين لمستقيمين

معلومين على التناظر هي ثابتة لجميع أوضاع نقطة تقاطع الوترين وإذا اعتبرنا الوترين المنارين بمركز القطع الناقص وموازيين لها يستنتج أن النسبة الكائنة بين المستطيلين المكونين من أجزاء أى وترين في قطع ناقص تساوى النسبة الكائنة بين مربعى نصفى القطرين الموازيين لها وتستنتج الحالة الخصوصية الآتية وهي أن النسبة الكائنة بين طول المماسين لقطع ناقص في نقطة ما تساوى النسبة الكائنة بين نصفى القطرين الموازيين لهذين المماسين

٧٧ - النظرية العشرون — طول الوتر البورى لأى قطع ناقص يتغير على حسب مربع نصف القطر الموازى له

لنفرض أن $ع ب ع$ هو الوتر البورى وأن $د ح د$ هو القطر الموازى له ونفرض أن المماسين في نقطتي $ع$ و $د$ يتقاطعان في نقطة $ط$ فيكون $ط$ منصفاً للمستقيم $ع د$ في نقطة $ف$ ويكون $ط$ موازياً للمماس في نقطة $د$



ثم نفرض أن المماس في نقطة $ع$ يقطع امتداد $د$ في نقطة $هـ$ ونرسم $ع و$ موازياً للمستقيم $د ف$ فيقطع $د$ في نقطة $و$ فيكون

$$د ح د = د هـ د \quad [\text{بمقتضى النظرية الخامسة عشرة}]$$

$$\text{ولكن } د و د = د ف د = د ع د \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{و } د هـ د = د ا د \quad [\text{بمقتضى النظرية السابعة}]$$

$$\text{وحينئذ يكون } د ع د \cdot \frac{1}{4} = د ا د = د هـ د$$

٧٨ — النظرية الحادية والعشرين — اذا قطعت دائرة قطعاً ناقصاً في أربع نقط فان المستقيم الواصل بين أى نقطتين من نقط التقاطع والمستقيم الواصل بين النقطتين الأخرين يكوّنان زاويتين متساويتين مع أى محور من المحورين

وللبرهنة على ذلك نفرض ك ل م ن نقط التقاطع الأربعة وبفرض أن ك ل م ن يتقاطعان في نقطة و وحيث ان النقط الأربعة ك ل م ن واقعة على محيط دائرة فيكون المستطيلان ك و . و ل م و ك و . و متساويين وكذلك حيث أن النقط الأربعة واقعة على منحنى القطع الناقص فيكون ك و . و ل م و . و = ع : ع = ع : ع

نفرض ع ك ع ل م نصفى القطرين الموازيين للمستقيم ك ل م ن على التناظر [بمقتضى بند ٧٨]

وبناء عليه يكون نصف القطرين الموازيين للوترين متساويين ولا بد اذا أن يكونا متساوي الميل على كل من المحورين
ثانياً نفرض ان ك ل م ن متوازيان

وحيث أن المستقيم المنصف لوترين متوازيين في دائرة عمود عليهما فيكون الوتران ك ل م ن عمودين على قطر القطع الناقص المزاوج لهما وحينئذ يلزم أن يكون الوتران متوازيين لأحد المحورين

(وبالعكس) اذا كان وتران لقطع ناقص غير متوازيين متساويي الميل على أحد المحورين تكون نهاياتها الأربعة واقعة على محيط دائرة.

مسائل

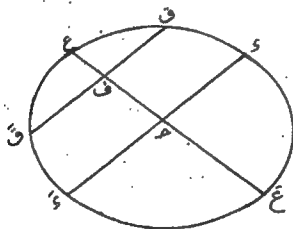
(١) اذا فرض أن و ع و د مماسات لقطع ناقص نصف محوريه
 $\angle \alpha$ $\angle \beta$ $\angle \gamma$ فالمطلوب البرهنة على أن النسبة و ع : و د لا يمكن أن تكون
 أكبر من $\alpha : \beta$

(٢) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة لا يمكن أن يقطع منحنى القطع
 الناقص في أكثر من أربع نقط

(٣) اذا كان وترا القطع الناقص ع و د متساويي الميل على أحد
 المحورين فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة ع و د يمس منحنى القطع
 الناقص في نقطة ع

٧٩ — تعريف — المستقيم و ف المرسوم من نقطة و الواقعة على
 منحنى قطع ناقص موازيا للماس المرسوم في احدى نهايتي القطر ع ف ح ع
 يسمى (الاحداثي الرأسى للقطر ع ح ع)

النظرية الثانية والعشرون — اذا فرض أن و ف احداثي رأسى
 للقطر ع ف ح ع في قطع ناقص وأن د نصف القطر المزاوج للقطر
 ع ح فانه يكون و ف : ح ع = د ف : ح د = د : ح ع



وللبرهنة على ذلك نمد $ن$ ف على استقامته فيقطع منحني القطع الناقص في نقطة $ن$ وحيث ان $ن$ مواز للمماس في نقطة $ع$ فتكون $ف$ هي النقطة المنصبة للمستقيم $ن$

ومن المعلوم بمقتضى بند ٧٨ أن النسبة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء وترى قطع ناقص مرسومين في اتجاه معلوم هي ثابتة وإذا يكون

$$\begin{aligned} &ن.ف.ف.ن : ع.ف.ف.ع = د.د.د.ع : ع.ع.ع.ع \\ &\therefore ن.ف.ف.ن : ع.ف.ف.ع = د.د.د.ع : ع.ع.ع.ع \\ &\text{أو } ن.ف.ف.ن : ع.ف.ف.ع = د.د.د.ع : ع.ع.ع.ع \end{aligned}$$

مسائل على القطع الناقص

(١) إذا رسم مماسان لقطع ناقص من أى نقطة على العمود المقام من البورة على المحور فالمطلوب البرهنة على أن طول الجزء من الدليل المناظر للبورة المحصور بين المماسين المذكورين ينصفه المحور

(٢) إذا أخذت قطعة من الورق على شكل نصف دائرة وفرضت نقطة ك على القطر المكوّن للقاعدة ثم طبقت الورقة بحيث تقع هذه النقطة على أى نقطة من نقط المحيط فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الذي تحدّثه كسرة الورق يمس قطعاً ناقصاً بورتاه ك $ك$ مع فرض أن $ك$ هي مركز الدائرة

(٣) إذا رسم مماسان لقطع ناقص في نقطتي $ع$ $ك$ $ن$ من نقطة على محيط الدائرة الأصلية ثم رسم قطراً للقطع الناقص $ع.ك.ع$ $ك.ن.ك$ $ن.ع.ن$ فالمطلوب البرهنة على أن $ع.ك.ع$ $ك.ن.ك$ $ن.ع.ن$ وتران بوريان

(٤) إذا رسم من نقطة ط المماسان ط.ع $ك$ ط $ن$ لقطع ناقص ورسم أى مستقيم مواز للمماس ط.ع ليقطع ط.ن في ل ويقطع ع.ن في م ويقطع المنحني في ر $ك.ر$ فالمطلوب البرهنة على أن $ل.م.ل = ل.ر.ل$

(٥) إذا رسم مماس للقطع الناقص الذى بورتاه ب ٦ ب فى نقطة ع فقطع المماسين له فى نقطتى الرأس فى ط ٦ ط ثم وصلنا ط ب ٦ ط ب ب فتقاطعا فى نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن و واقعة على العمودى فى نقطة ع وان الدائرة ب ع ب هى دائرة التسع النقط للثلث و ط ط

(٦) إذا رسم من البورتين ب ٦ ب لقطع ناقص عمودان على ب ع ٦ ب ع على التناظر فقطعا عمودى نقطة ع فى نقطتى م ٦ م على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن المحور الأصغر منصف للمستقيم م م

(٧) إذا كان ع ب و ٦ ع ب و وترين بورتين متوازيين فى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المماسات للقطع الناقص فى ع ٦ ب ٦ ع ٦ ب تكون متوازي أضلاع يكون أثنان من رؤسها الأربعة واقعين على الدليل والرأسان الآخران واقعين على محيط الدائرة الأصلية

(٨) إذا فرض أن ع ٦ د نهايتا قطارين متوازيين فى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمت الواصلة بين البورتين وبين النقطتين ع ٦ د تمس دائرة نصف قطرها مساو لنصف المحور الأصغر

(٩) إذا فرض أن ع ٦ ح نقطتان متناظرتان على منحنى قطع ناقص ومحيط دائرته الأصلية فالمطلوب البرهنة على أن بعدى البورتين ب ٦ ب عن المماس للدائرة الأصلية فى نقطة ع يساويان المستقيمين ب ع ٦ ب ع على التناظر

(١٠) إذا فرض أن أضلاع متوازي الأضلاع ا ب ح د تمس منحنى قطع ناقص بورتاه ف فالمطلوب البرهنة على أن محيطات الدوائر ا ب ف ٦ ب ح ف ٦ ح د ف ٦ د ا ف كلها متساوية

(١١) إذا فرض أن وترا بوريا لقطاع مخروطى يمر بنهايات قطرين متوازيين لقطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن طول الوتر يساوى نصف المحور الأكبر

(١٢) إذا رسم المستقيم ab من النقطة الثابتة a ليقابل محيط دائرة ثابتة في نقطة b ثم رسم من نقطة b المستقيم $b \gamma$ عموداً على ab ليقطع دائرة متحدة مع الأولى في المركز في نقطة δ فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من نقطة δ موازياً للمستقيم ab يمس قطاعاً منحروباً ثابتاً

(١٣) إذا رسم مستقيم من بورة قطع ناقص ليقطع المماسين في نقطتي الرأس في β و γ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة التي قطرها $\beta \gamma$ يمس القطع الناقص في نهايتي وتر مواز للحدور الأكبر

(١٤) إذا فرض أن قطعين ناقصين لهما دائرة أصلية واحدة وفرض أن أحدهما يمر ببورتي الآخر فالمطلوب البرهنة على أن الثاني يمر ببورتي الأول أيضاً

(١٥) إذا فرض أن ΓA هو المحور الأكبر لقطع ناقص بورته b و δ وأن ϵ أي نقطة واقعة على المنحنى ثم رسم $a \delta$ و $\Gamma \delta$ موازيين للمستقيمين $b \delta$ و $\epsilon \delta$ على التناظر فقطعا المماس للمنحنى في نقطة ϵ في δ و ϵ فالمطلوب اثبات ما يأتي

$$\Gamma A = \delta \Gamma + \delta A$$

(١٦) إذا رسم قطع مكافئ يمر ببورتي قطع ناقص معلوم وبورته نقطة على منحنى القطع الناقص فالمطلوب البرهنة على أن دليل القطع المكافئ دائماً مماس للدائرة الأصلية للقطع الناقص

(١٧) إذا رسم مماسان لقطع ناقص مركزه δ في نقطتي ϵ و δ اللتين هما نهايتا قطرین متزاجين للقطع الناقص فتقاطع المماسان في نقطة β وفرض أن γ يقطع المنحنى في نقطة δ ثم رسم الوتران $\delta \epsilon$ و $\delta \gamma$ موازيين للمستقيمين $\delta \epsilon$ و $\delta \gamma$ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن $\delta \epsilon$ مواز للتقسيم $\epsilon \delta$

(٢٣) إذا أنزل من أى نقطة على منحنى قطع ناقص مثل نقطة ع عمود على القطر ح فقطع الدائرة الأصلية فى س كـ فالملبوس البرهنة على أن سـ يساوى الفرق بين البعدين البوريين لاحدى نهايتى القطر المزواج للقطر ح عـ

(٢٤) من نقطة ع الواقعة على منحنى قطع ناقص رسم المستقيم ع ه ليقطع المحورين بحيث يكون الجزآن ع و ك ع ه مساويين لنصف المحورين على التناظر ثم رسم عمود على المحورين من نقطتي ه ك و فتقاطعا في نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن ع و عمود على المنحنى

(٢٥) اذا كانت ع أى نقطة على منحنى قطع ناقص مركزه ح وبورته ب ك ب وفرض أن القطر المزاوج للقطر ح ع يقطع ب ع في نقطة ه فالمطلوب البرهنة على أن الفرق بين المربعين المرسومين على ح ع ك ب ه ثابت (٢٦) اذا فرض أن قطعا ناقصا معلوم نصفه محوريه يمس ثلاثة أضلاع من أضلاع مستطيل معلوم فالمطلوب إيجاد مركزه وبورته

(٢٧) اذا كان وتر من أوتار قطع ناقص موازيا لاحد القطرين المتوازيين المتساويين فالمطلوب البرهنة على أن العمودين على المنحنى في نهايتي هذا الوتر يتقاطعان على القطر العمودى على القطر الثانى المزاوج والمساوى للاول

(٢٨) اذا فرض أن ح ع ك و نصفا قطرين متوازيين في قطع ناقص وأن العمودين عليه في ع ك و يتقاطعان في نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن ح و عمود على ع و

(٢٩) اذا رسم عمودان على منحنى قطع ناقص في نقطتي ع ك ع اللتين هما نهايتا وتر يورى فقطعا المحور الأكبر في نقطتي ح ك ع على التناظر وتقاطعا في نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من و موازيا للمستقيم ع ح منصف للمستقيم ح ك

(٣٠) اذا فرض أن قطعين ناقصين في مستو واحد لهما بورة مشتركة وكان أحد القطعين ثابتا والثانى يدور حول البورة المشتركة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقاطع المماسات المشتركة لهما هو محيط دائرة

(٣١) اذا علمت البورة ب لقطع ناقص وعلم أيضا طول المحور الأكبر ونقطة صـ على المنحنى كنقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن القطع الناقص يمر دائما قطعاً ناقصاً آخر ثابتاً بورتاة ب ٦ ع

(٣٢) اذا علمت بورة قطع ناقص وعلم طول المحور الأكبر وعلم ان البورة الثانية واقعة على مستقيم ثابت فالمطلوب البرهنة على أن القطع الناقص يمر قطعين مكافئين ثابتين بورتها البورة المعلومة

(٣٣) اذا علم مركز قطع ناقص ونصف قطر دائرة الاستدلال ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن القطع الناقص يمر دائما قطعاً ناقصاً ثابتاً متحداً مع القطع الناقص الاول في المركز

(٣٤) اذا فرض أن قطعين ناقصين معلومين متحدين في المركز وواقعين في مستو واحد متساويان في المحور الأكبر فالمطلوب بيان كيفية رسم المماسات المشتركة

(٣٥) اذا كان قطران من أقطار الشكل الرباعي المرسوم حول قطع ناقص يتقاطعان في احدى البورتين فالمطلوب البرهنة على أن هذين القطرين متعامدان وأن القطر الثالث هو الدليل المناظر للبورة

(٣٦) اذا فرض أن ع ع وتر لقطع ناقص مواز للمحور الأكبر ورسمت دائرتان تمران باحدى البورتين ب وتمسان المنحنى في نقطتي ع ٦ ع على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن الدائرتين تتقاطعان في نقطة ف التي هي نقطة تقاطع ع ع ٦ ب مع فرض ط نقطة تقاطع المماسين في ع ٦ ع

والمطلوب البرهنة أيضا على أن المحل الهندسي لنقطة ف للاوضاع المختلفة للسقيم ع ع هو قطع مكافئ رأسه نقطة ب

(٣٧) اذا رسم محيط دائرة لقطع مستقيمين متوازيين معلومين ويكون منهما الوترين المتساويين ا ب ٦ حـ ويمر هذا المحيط بالنقطة الثابتة س

الواقعة بين المستقيمين فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمين المتقاطعين
 ا د ٦ ب ه يمان دائما منحنيا ثابتا احدى بورتية نقطة ب

(٣٨) اذا فرض أن ع ٦ ٤ نقطتان متناظرتان على منحنى قطع ناقص
 ومحيط الدائرة الأصلية التي مركزها ه ثم مد ه ع على امتدائه لقطع
 الدائرة الاصلية في نقطة ٣ فالمطلوب البرهنة على أن المماس للقطع الناقص
 في نقطة ٣. المناظرة لنقطة ٣ عمود على ه ع وأنه يحدد من المستقيم ه ع
 طولاً مساوياً للمستقيم ه ع

(٣٩) اذا فرض أن قطعين ناقصين في مستو واحد ولهما بورة مشتركة
 ومحوراهما الأكبران متساويان ثم تصورنا أن أحد القطعين يدور في مستوي ه
 حول البورة المشتركة والثاني ثابت فالمطلوب البرهنة على أن الوتر المشترك
 في القطعين الناقصين دائماً يمس منحنيًا آخر متحداً في البور مع القطع الناقص
 الثابت

(٤٠) اذا فرض أن المماس لقطع ناقص في نقطة على المنحنى مثل نقطة
 ع يقطع أى مماسين متوازيين في نقطتي م ٦ ٥ فالمطلوب البرهنة على أن
 محيط الدائرة التي قطرها م ٥ يقطع العمودى على المنحنى في نقطة ع
 في نقطتين متباعدتين عن بعضهما بقدر طول القطر المزاوج للقطر ه ع
 وبعدهما من المركز يساويان مجموع وفرق نصفي المحورين على التناظر

(٤١) المطلوب البرهنة على أن قطر القطع الناقص الموازى لأى وتر
 بورى يساوى الوتر الواصل بين النقطتين الواقعتين على محيط الدائرة الاصلية
 المناظرتين لنهايتي الوتر البورى

(٤٢) اذا فرض أن أضلاع مستطيل تمس قطعاً ناقصاً فالمطلوب البرهنة
 على أن الدائرة المازة باحدى البورتين و برأى زاويتين متجاورتين في المستطيل
 تساوى الدائرة الاصلية

(٤٤) المطلوب البرهنة على أن مساحة متوازي الاضلاع المكوّن من المماسات لقطع ناقص في نهايات قطرين من أقطاره تتغير تغيراً عكسياً بتغير مساحة متوازي الاضلاع المكوّن من توصيل نقط التماس.

(٤٥) إذا رسمت جملة أشكال متوازية الأضلاع في قطع ناقص وكانت أضلاعها موازية للاقطار المتوازية المتساوية فالمطلوب البرهنة على أن مجموع مربعات أضلاع أى متوازى أضلاع منها ثابت

(٤٦) إذا رسم قطع ناقص قطره المستقيم الواصل بين بورتى قطع ناقص معلوم والنظر المزاج له مستقيم مساو للحوار الاصغر للقطع الناقص المعلوم أيضا فالمطلوب البرهنة على أن هذا القطع الناقص يمس دائما القطع الناقص الأصلي

(٤٧) اذا فرض أن جملة قطاعات ناقصة بورها واقعة على ضلعين متجاورين من متوازي أضلاع معلوم وتمس الضلعين الآخرين فالملطوب البرهنة على أن المحل الهندسي لمراكزها هو خط مستقيم

(٤٨) اذا وصلنا نهاية قطر من أقطار منحنى قطاع مخروطي ذي مركز بنهايتي أحد احداثياته الرأسية فال المطلوب البرهنة على أن الوترين المرسومين بهذه الكيفية مناسبان للقطرين الموازيين لهما

(٤٩) المطالب البرهنة على أن الأوتار العمودية في متخني قطاع مخروطي إذا كانت متعامدة فإنها تكون مناسبة للاقطار الموازية لها

(٥٠) إذا كان ع-ع وترا عموديا في قطع ناقص في نقطة ع وكان حـى هو العمودى على المماس فى تلك النقطة وفرض أن حـن هو نصف القطر الموازى للوتر ع-ع فالمطلوب البرهنة على أن ع-حـى = ٢ حـن

(٥١) اذا فرض أن $ع ح ع$ عبارة عن قطر من أقطار قطع ناقص ورسم الوتر $و$ ومد على استقامته ليقطع في نقطة $س$ المماس في نقطة $ع$ فالمطلوب البرهنة على أن القطر الموازي للوتر $و$ وسط متناسب بين $ع و ك ع س$

(٥٢) اذا رسم من نقطة على منحنى قطع ناقص وتران متساويا الميل على المماس في هذه النقطة فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين هذين الوترين تساوى النسبة بين الوترين البورين الموازيين لها

(٥٣) اذا فرض قطع ناقص معلوم محوره الأكبر واحد بورتيه التي هي بورة قطع مكافئ معلوم ومماس له فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لمركز القطع الناقص هو مستقيم عمود على محور القطع المكافئ وأن كل هذه القطاعات الناقصة تمس قطعاً مكافئاً آخر مشتركاً مع القطع المكافئ المعلوم في المحور والبورة

(٥٤) اذا فرض أن مماساً لقطع ناقص في نقطة ما مثل $ع$ يقطع الدليلين المتناظرين للبورتين $ب ك$ في نقطتي $ز ه$ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن $ز ب ك ه$ يتقاطعان على الاحداثي الرأسي للنهاية الثانية للقطر المرسوم من نقطة $ع$

(٥٥) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين بورتي قطع ناقص يقابل زاوية رأسها في قطب أحد الاوتار مساوية لنصف مجموع الزاويتين اللتين يقابلهما هذا المستقيم ورأسهما في نهايتي هذا الوتر

(٥٦) اذا فرض أن الاحداثي الرأسي لقطع ناقص في نقطة ما على المنحنى مثل نقطة $ع$ قد مد على استقامته ليقطع في نقطة $و$ العمود النازل من المركز على المماس للمنحنى في نقطة $ع$ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة $و$ هو قطع ناقص

(٦٢) اذا فرضت نقطة على منحني قطع ناقص مثل نقطة ع ثم وصلت بالوترين ومد الخطان على استقامتهما ليقطعا الدليلين المناظرين للوترين في نقطتي ٦ ٥ فال المطلوب البرهنة على أن ٥ ٥ والمماس للمنحني في النهاية الثانية للقطر المار بنقطة ع يتقاطعان على محور القطع الناقص

(٦٣) اذا فرض أن ب ع ك ب ع عمودان نازلان من بورتى قطع ناقص على المماس في نقطة م مثل ع وان و ك و موقعا الدليلين المناظرين للبورتين ب ك ب على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن و ك و ب يتقاطعان على المحور الاصغر وان ك ب عمودان على و ك و ب مع فرض م موقع الاحداثى الرأس لنقطة ع

(٦٤) اذا فرض ان ٦ ١ عبارة عن المحور الاكبر لقطع ناقص وان ب ك ب موقعا العمودين النازلين من البورتين على المماس في أى نقطة من نقط المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقاطع ١ ك ٦ هو منحنى قطع ناقص

(٦٥) اذا فرض أن أى قطرين متزاجين فى قطع ناقص يقطعان دائرة الاستدلال فى نقطتي ك ب فالمطلوب البرهنة على أن ك ب مماس للقطع الناقص

(٦٦) اذا فرض أن ب ع ك ب عبارة عن عمودين نازلين من بورتى قطع ناقص على المماس فى أى نقطة على نقط المنحنى مثل نقطة ع فالمطلوب البرهنة على ان المماسين للدائرة الأصلية فى نقطتي ب ك يتقاطعان فى نقطة ط على الاحداثى الرأسى م وان المحل الهندسى لنقطة ط هو منحنى قطع ناقص

(٦٧) اذا رسم من بورتى قطع ناقص العمودان ب ع ك على أى مماس له وفرض أن و ك و هما موقعا الدليلين المناظرين للبورتين ثم رسم و ك و ب ليقطعا الدائرة الأصلية فى نقطتين أخريين ك ب على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ك ب مماس للقطع الناقص

(٦٨) المطلوب البرهنة على أن مساحة المثلث الواقعة رؤوسه الثلاثة على منحنى قطع ناقص ومساحة المثلث التى رؤوسه الثلاثة هى النقط الثلاثة المناظرة للنقط الأولى على الدائرة الأصلية بينهما نسبة ثابتة.

(٦٩) اذا رسم مثلث في منحنى قطع ناقص بحيث تكون مساحته أكبر مساحة ممكن رسمها فالمطلوب البرهنة على أن نقطة تقاطع الخطوط المنصفة في المثلث تنطبق على مركز القطع الناقص

(٧٠) المطلوب إيجاد مركز قطع ناقص اذا علمت احدى البورتين وعلم الدليل المناظر للبورة المجهولة وعلم مماس للمنحنى

(٧١) اذا رسمت جملة قطاعات ناقصة لها بورة مشتركة ب و وتر بوري عمودى ل ب ل مشترك ثم رسم مستقيم ثابت من نقطة ب ليقطع هذه المنحنيات ورسمت الاعمدة عليهما في نقط التقاطع فالمطلوب البرهنة على أن كل هذه الاعمدة تمس قطعاً مكافئاً بورته واقعة على الوتر ل ب ل

(٧٢) المطلوب البرهنة على أن المحور الاصغر للقطع الناقص المرسوم داخل مثلث معلوم لا يمكن أن يزيد عن قطر الدائرة المرسومة داخله

(٧٣) اذا فرض أن منحنى قطع ناقص معلوم مركزه يمر أضلاع مثلث معلوم فالمطلوب إيجاد نقط التماس

(٧٤) اذا فرض أن ع ب و وتر بوري لقطع ناقص ك ع ح ك ب و وتران عمودان عليه فالمطلوب البرهنة على أن المثلثين ب ع ح ك ب و متشابهان

(٧٥) المطلوب البرهنة على أن الزاوية الخارجة المكونة من مماسين لقطع ناقص تساوى نصف مجموع الزاويتين اللتين يقابلهما وتر التماس ورأساهما في البورتين

(٧٦) اذا فرض أن ضعف الاحداثى الرأسى ع ع العمود على المحور الأكبر في قطع ناقص مركزه ح يقطع الدائرة الاصلية في ع ك ع ك فالمطلوب البرهنة على أن الجزء من العمودى على المنحنى في نقطة ع المحصور بين ح ع ك ع ك ح ع ك تنصفه نقطة ع

(٧٧) اذا فرض أن العمودى على قطع ناقص في نقطة ع يقطع المحورين في ح ٦ ع ثم رسم ح ك عموداً من المركز على التماس في نقطة ع وفرض أن و ٦ و هما منتصفا المستقيمين ح ع ٦ ح ٦ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن و ب = و ك = و ع وأن و ا = و ك = و ع

(٧٨) اذا فرض أن ا نقطة ثابتة داخل دائرة معلومة و ع نقطة على محيط الدائرة ورسم ع ك بحيث يصنع مع ا ع زاوية معلومة فالمطلوب البرهنة على أن ع ك يمس قطعاً ناقصاً ثابتاً وأن الاختلاف المركزى للقطع الناقص لاعلاقة له بمقدار الزاوية الثابتة ا ع و

(٧٩) اذا فرض أن ع د ع ضعف احدائى رأسى لقطع ناقص مركزه ح وأن العمودى على المنحنى في نقطة ع يقطع ح ع في و فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة و للاوضاع المختلفة للمستقيم ع د ع هو قطع ناقص

(٨٠) اذا كان مماسان لقطع ناقص متعامدين على بعضهما فانه يطلب البرهنة على أن المستطيل المكوّن من العمودين النازلين من المركز ونقطة تقاطع التماسين على وتر التماس ثابت

(٨١) اذا رسم متوازى أضلاع حول محيط دائرة معلومة وفرض أن رأسين من رؤوسه واقعان على مستقيمين ثابتين متوازيين ومتساويى البعد عن المركز فالمطلوب البرهنة على أن الرأسين الأخرين واقعتان على قطع ناقص دائرته الاصلية الصغرى هى الدائرة المعلومة

(٨٢) اذا فرضت دائرتان متحدتا المركز وكان مركزهما نقطة د ورسم ح و نصف قطر للدائرة الخارجة و ح و نصف قطر للدائرة الداخلة وفرض أن نصفى القطرين المذكورين متساويا الميل على مستقيم ثابت فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع المنتصفة لنصف القطر و ب هو قطع

ناقص وأن ϵ و هو العمودى على هذا القطع الناقص في نقطة ϵ وأن
 ϵ مساو للقطر المزاوج للمستقيم ϵ

(٨٣) إذا رسم من نقطة ما على منحنى قطع ناقص مثل ϵ مماس للدائرة
 الأصلية الصغرى فقطع دائرة الاستدلال في ϵ و ϵ فال المطلوب البرهنة
 على أن ϵ و ϵ يساويان البعدين البوريين لنقطة ϵ

(٨٤) إذا رسم من نقطة ϵ المماسان ϵ و ϵ و لقطع ناقص وكان
 المنصف للزاوية ϵ و ϵ يمر بنقطة ثابتة على المحور الاكبر للقطع الناقص
 المذكور فانه يطلب البرهنة على أن ϵ لا بد أن تكون واقعة على محيط دائرة ثابتة
 (٨٥) إذا فرض أن محيط دائرة يتدرج داخل على محيط دائرة أخرى
 نصف قطرها ضعف نصف القطر للدائرة المتدرجة فانه يطلب البرهنة على
 أن كل نقطة من نقط الدائرة المتحركة ترسم في سيرها قطعاً ناقصاً

(٨٦) إذا كانت ϵ نقطة ما على منحنى قطع ناقص بورتاه ϵ و ϵ
 فال المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة الداخلة لثلث ϵ و ϵ
 هو قطع ناقص

(٨٧) المطلوب البرهنة على أن الجزء من أى وتر عمودى فى قطع ناقص
 المحصور بين الدليلين يقابل زاوية رأسها فى قطب الوتر مساوية لنصف مجموع
 الزاويتين اللتين يقابلهما البعد بين البورتين ورأسهما فى نهايتى الوتر

(٨٨) إذا فرض أن ϵ و ϵ و ϵ أى مماسين لقطع ناقص ورسم
 ϵ و عموداً على المحور الاكبر فال المطلوب البرهنة على أن ϵ و ϵ منصف
 للزاوية ϵ و ϵ و

(٨٩) إذا فرض أن المماس فى نقطة ثابتة مثل ϵ لقطع ناقص بورتاه
 ϵ و ϵ يقطعه مماسان آخران متوازيان فى تقطعي ϵ و ϵ ثم رسم
 المستقيمان ϵ و ϵ و فتقاطعا فى نقطة و المستقيمان ϵ و ϵ و

فقطاطعا في نقطة ω فالمطلوب البرهنة على أن ω و ϕ واقعتان على محيط دائرة ثابتة مارة بالبورتين •

(٩٠) اذا رسمت ثلاثة قطاعات ناقصة في مثلث حاد الزوايا وكانت كل نقطة من النقط الثلاثة التي في منتصف الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه احدى بورتي أحد القطاعات الناقصة الثلاثة فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقط الثلاثة والبور الثلاثة الاخرى تكون مستمتعا يتقاطع كل ضلعين متقابلين من أضلاعه في رأس من رؤوس المثلث

(٩١) اذا فرض أن ϵ هو العمودى على منحنى قطع ناقص فى نقطة ϵ ورسم ϵ ل عمودا على ϵ ورسم ϵ موازيا لأحد البعدين البورين لنقطة ϵ ققطع ϵ فى نقطة ϵ فالمطلوب البرهنة على أن المثلثين ϵ ل ϵ ϵ م ϵ متشابهان

(٩٢) المطلوب رسم القطع الناقص اذا علم مماس له وعلمت نقطة التماس ودائرة الاستدلال

(٩٣) إذا رسم الوتران $ق-ك$ و $ك-س$ لقطع ناقص موازيين لأحد القطرين المتوازيين المتساويين فقطعا القطر المزاج الثاني $ع-ح$ ع المساوي للاول في تقاطع $ك$ وفي جهتين متقابلتين من المركز بحيث يكون ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و ١١ و ١٢ و ١٣ و ١٤ و ١٥ و ١٦ و ١٧ و ١٨ و ١٩ و ٢٠ و ٢١ و ٢٢ و ٢٣ و ٢٤ و ٢٥ و ٢٦ و ٢٧ و ٢٨ و ٢٩ و ٣٠ و ٣١ و ٣٢ و ٣٣ و ٣٤ و ٣٥ و ٣٦ و ٣٧ و ٣٨ و ٣٩ و ٤٠ و ٤١ و ٤٢ و ٤٣ و ٤٤ و ٤٥ و ٤٦ و ٤٧ و ٤٨ و ٤٩ و ٥٠ و ٥١ و ٥٢ و ٥٣ و ٥٤ و ٥٥ و ٥٦ و ٥٧ و ٥٨ و ٥٩ و ٦٠ و ٦١ و ٦٢ و ٦٣ و ٦٤ و ٦٥ و ٦٦ و ٦٧ و ٦٨ و ٦٩ و ٧٠ و ٧١ و ٧٢ و ٧٣ و ٧٤ و ٧٥ و ٧٦ و ٧٧ و ٧٨ و ٧٩ و ٨٠ و ٨١ و ٨٢ و ٨٣ و ٨٤ و ٨٥ و ٨٦ و ٨٧ و ٨٨ و ٨٩ و ٩٠ و ٩١ و ٩٢ و ٩٣ و ٩٤ و ٩٥ و ٩٦ و ٩٧ و ٩٨ و ٩٩ و ١٠٠ و ١٠١ و ١٠٢ و ١٠٣ و ١٠٤ و ١٠٥ و ١٠٦ و ١٠٧ و ١٠٨ و ١٠٩ و ١١٠ و ١١١ و ١١٢ و ١١٣ و ١١٤ و ١١٥ و ١١٦ و ١١٧ و ١١٨ و ١١٩ و ١٢٠ و ١٢١ و ١٢٢ و ١٢٣ و ١٢٤ و ١٢٥ و ١٢٦ و ١٢٧ و ١٢٨ و ١٢٩ و ١٣٠ و ١٣١ و ١٣٢ و ١٣٣ و ١٣٤ و ١٣٥ و ١٣٦ و ١٣٧ و ١٣٨ و ١٣٩ و ١٤٠ و ١٤١ و ١٤٢ و ١٤٣ و ١٤٤ و ١٤٥ و ١٤٦ و ١٤٧ و ١٤٨ و ١٤٩ و ١٥٠ و ١٥١ و ١٥٢ و ١٥٣ و ١٥٤ و ١٥٥ و ١٥٦ و ١٥٧ و ١٥٨ و ١٥٩ و ١٦٠ و ١٦١ و ١٦٢ و ١٦٣ و ١٦٤ و ١٦٥ و ١٦٦ و ١٦٧ و ١٦٨ و ١٦٩ و ١٧٠ و ١٧١ و ١٧٢ و ١٧٣ و ١٧٤ و ١٧٥ و ١٧٦ و ١٧٧ و ١٧٨ و ١٧٩ و ١٨٠ و ١٨١ و ١٨٢ و ١٨٣ و ١٨٤ و ١٨٥ و ١٨٦ و ١٨٧ و ١٨٨ و ١٨٩ و ١٩٠ و ١٩١ و ١٩٢ و ١٩٣ و ١٩٤ و ١٩٥ و ١٩٦ و ١٩٧ و ١٩٨ و ١٩٩ و ٢٠٠ و ٢٠١ و ٢٠٢ و ٢٠٣ و ٢٠٤ و ٢٠٥ و ٢٠٦ و ٢٠٧ و ٢٠٨ و ٢٠٩ و ٢١٠ و ٢١١ و ٢١٢ و ٢١٣ و ٢١٤ و ٢١٥ و ٢١٦ و ٢١٧ و ٢١٨ و ٢١٩ و ٢٢٠ و ٢٢١ و ٢٢٢ و ٢٢٣ و ٢٢٤ و ٢٢٥ و ٢٢٦ و ٢٢٧ و ٢٢٨ و ٢٢٩ و ٢٣٠ و ٢٣١ و ٢٣٢ و ٢٣٣ و ٢٣٤ و ٢٣٥ و ٢٣٦ و ٢٣٧ و ٢٣٨ و ٢٣٩ و ٢٤٠ و ٢٤١ و ٢٤٢ و ٢٤٣ و ٢٤٤ و ٢٤٥ و ٢٤٦ و ٢٤٧ و ٢٤٨ و ٢٤٩ و ٢٥٠ و ٢٥١ و ٢٥٢ و ٢٥٣ و ٢٥٤ و ٢٥٥ و ٢٥٦ و ٢٥٧ و ٢٥٨ و ٢٥٩ و ٢٦٠ و ٢٦١ و ٢٦٢ و ٢٦٣ و ٢٦٤ و ٢٦٥ و ٢٦٦ و ٢٦٧ و ٢٦٨ و ٢٦٩ و ٢٧٠ و ٢٧١ و ٢٧٢ و ٢٧٣ و ٢٧٤ و ٢٧٥ و ٢٧٦ و ٢٧٧ و ٢٧٨ و ٢٧٩ و ٢٨٠ و ٢٨١ و ٢٨٢ و ٢٨٣ و ٢٨٤ و ٢٨٥ و ٢٨٦ و ٢٨٧ و ٢٨٨ و ٢٨٩ و ٢٩٠ و ٢٩١ و ٢٩٢ و ٢٩٣ و ٢٩٤ و ٢٩٥ و ٢٩٦ و ٢٩٧ و ٢٩٨ و ٢٩٩ و ٣٠٠ و ٣٠١ و ٣٠٢ و ٣٠٣ و ٣٠٤ و ٣٠٥ و ٣٠٦ و ٣٠٧ و ٣٠٨ و ٣٠٩ و ٣١٠ و ٣١١ و ٣١٢ و ٣١٣ و ٣١٤ و ٣١٥ و ٣١٦ و ٣١٧ و ٣١٨ و ٣١٩ و ٣٢٠ و ٣٢١ و ٣٢٢ و ٣٢٣ و ٣٢٤ و ٣٢٥ و $$

(٩٤) إذا رسم قطع ناقص في مثلث وكان مركزه هو مركز الدائرة المرسومة حول المثلث فالمطلوب البرهنة على أن الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها هي أعمدة على القطع الناقص المذكور

(٩٥) اذا رسم منحنيًا قطاعين مخروطيين مركز كل منهما نقطة تقاطع
أعمدة مثلث وكان أحد المنحنيين مماسًا لاضلاع المثلث والثاني مازًا برؤوسه

فالمطلوب البرهنة على أن المنحنيين المذكورين متشابهان وأن المحاور المتناظرة
فيهما متعامدة

(٩٦) إذا فرض أن $ع ب و ك ع هـ$ وتران بوريان في قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المماس في نقطة $ع$ والوتر $و ك$ يقطعان المحور الأكبر في نقطتين على بعدين متساويين من المركز

(٩٧) إذا فرض أن $ع ب و ك ع هـ$ وتران بوريان في قطع ناقص وفرض أن المماسين في $و ك$ يتقاطعان في نقطة $ط$ فالمطلوب البرهنة على أن النقطة المنصفة للمستقيم $ط ع$ واقعة على المحور الأصغر وأن المحل الهندسي لنقطة $ط$ هو قطع ناقص

(٩٨) إذا كان المحور الأكبر لقطع ناقص عمودا على المحور الأكبر لقطع ناقص آخر وتقاطع المنحنيين في أربع نقط فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقط الأربعة واقعة على محيط دائرة

(٩٩) إذا كان المحوران الأكبران لقطعيتين ناقصتين متوازيين وتقاطع المنحنيين في أربع نقط فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقط الأربعة واقعة على محيط دائرة إلا إذا كان الاختلاف المركزي فيهما واحدا

(١٠٠) إذا فرض أن $و ك و ن$ مماسان لقطع ناقص وأن $ح ع ك$ نصف القطرين الموازيين لهما فالمطلوب البرهنة على أن
 $و ع . و ن + ح ع . و ن = و ب . و هـ$

الفصل الرابع

القطع الزائد

٨٠ — القطع الزائد هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك في مستو مشتمل على نقطة معلومة تسمى البورة ومستقيم معلوم يسمى الدليل ويكون تحركها بكيفية بحيث ان نسبة بعدها من البورة الى بعدها العمودى من الدليل تكون دائما ثابتة وأكبر من الوحدة وقد تقدم لنا البرهان فى الفصل الأول انه بناء على هذا التعريف يكون القطع الزائد متماثلا بالنسبة للعمود النازل من البورة على الدليل وتقدم البرهان أيضا على أنه اذا فرض أن المستقيم يقطع منحنى القطع الزائد فى نقطتي ٦ ٦ و فرضت ٦ منتصف الخط ٦ ٦ فان القطع الزائد يكون متماثلا بالنسبة للمستقيم ٦ ٦ المرسوم من ٦ موازيا للدليل ومن ذلك يستنتج أن هناك بورة أخرى واقعة على المستقيم ٦ ٦ ودليلا آخر عمودا على ٦ ٦

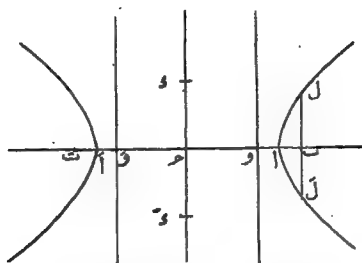
وقد تقدم البرهان أيضا فى بند ٤ أنه اذا كان ٦ ٦ هما البورتان وان ٦ ٦ يقطع الدليلين فى نقطتي ٦ ٦ وعلى التناظر يحدث أن

$$\frac{٦}{٦} = \frac{٦}{٦} = \frac{٦}{٦} = \frac{٦}{٦}$$

ويتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين كما فى الشكل ولا شئ من أجزاء المنحنى بين المستقيمين المرسومين من الرأسين موازيين للدليلين [بند ٦]

والمستقيمان ٦ ٦ و ٦ ٦ اللذان يكون القطع الزائد متماثلا بالنسبة لهما يسميان (المحور القاطع والمحور الغير القاطع على التناظر)

والمحور ٦ ٦ يقطع المنحنى فى نقطتين والجزء ٦ ٦ من هذا المحور يسمى أيضا بالمحور القاطع


$$C_p - Y_p = Y_{ps} -$$
$$b : l = b : u = a : a$$

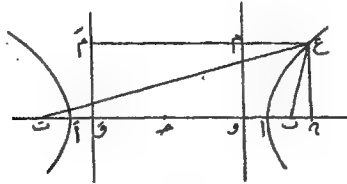
$$10 : 5 =$$

وحینئذ یكون (ل . ل . ا ح = ا ح . و . و = و . و . و)

١٨ النظرية الأولى - الفرق بين البعدين البورين لأى نقطة

على منحنى قطع زائد هو ثابت

وللبرهنة على ذلك نفرض $b \neq 0$ بورق القطع الزائد Γ نقطة ما عليه
ثم نصل b ع Γ ونرسم ع Γ عموداً على الدليلين فيقطعهما في
نقطتي m, m'



فيحدث $ع ب : ع م = ا ح : ا د$
 و $ع ب : ع م = ع م : ع ا$
 $\therefore ع ب - ع م : ع م - ع ا = ا ح : ا د$
 ولكن $ع م - ع ا = م م = م م = م م = م م$
 وحينئذ يكون $ا ح = ع ب - ع م$
 واذا فرض ان ع نقطة ماعلى الفرع المار بنقطة ا يحدث
 $ا ح = ع ب - ع م$
 واذا فرض ان ع نقطة ماعلى الفرع المار بنقطة ب يحدث
 $ا ح = ع ب - ع م$

ويمكننا أن نبرهن كما برهنا في بند ٥٥ على انه اذا فرضت نقطة ماخارجة
 عن منحنى القطع الزائد مثل نقطة و أى اذا كانت نقطة و موضوعة بحيث
 ان ب و يقطعه المنحنى فى نقطة واحدة ليس الا بين ب و ب يحدث

$$ب و \sim ب و > ا ب$$

وكذلك اذا فرضت نقطة و داخل القطع الزائد أى اذا كانت موضوعة
 بحيث ان ب و يقطعه المنحنى فى نقطتين بين ب و ب أو لا يقطعه بالمرّة
 فانه يحدث مايتّى $ب و \sim ب و < ا ب$

ويمكننا بواسطة الخواص المتقدمة المذكور للقطع الزائد رسمه بحركة مستمرة
 وذلك أن تؤخذ مسطرة كالمسطرة ال فى الشكل

ثم يثبت أحد طرفيها في نقطة ثابتة مثل نقطة a بحيث تسمح بحركة الطرف الثاني $ل$ حول النقطة الثابتة ثم يؤخذ خيط له طول ثابت ويثبت أحد طرفيه في طرف المسطرة $ل$ ويثبت الطرف الثاني في نقطة ثابتة مثل نقطة $ب$ ثم يشد الخيط بقلم رصاص ويمر القلم الرصاص بحيث يكون دائماً متكئاً على حافة المسطرة $ل$ a



فإذا فرضنا $ع$ نقطة ما من نقط أوضاع سن القلم الرصاص يكون $ل$ $ع + ع$ $ب$ مساويا لطول الخيط ويكون $ل$ $ع + ع$ $ا$ مساويا لطول المسطرة وجيلئذ يكون $ا$ $ع - ب$ $ع$ مساويا للفرق الثابت بين طول الخيط وطول المسطرة وبناء عليه يكون نقطة $ع$ دائماً واقعة على منحنى قطع زائد بورتاه تقطعا $ا$ $ب$

مسائل

(١) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علمت احدى البورتين وعلمت نهايتا المحور القاطع

(٢) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة (١) التى تماس مستقيما معلوما ودائرة معلومة (٢) التى يمر محيطها بنقطة معلومة ويمس محيط دائرة معلومة (٣) التى يمر محيطها بحيط دائرتين معلومتين

(٣) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تقطع دائرتين معلومتين بحيث يكون كل وتر من الاوتار المشتركة مساويا لمستقيم معلوم

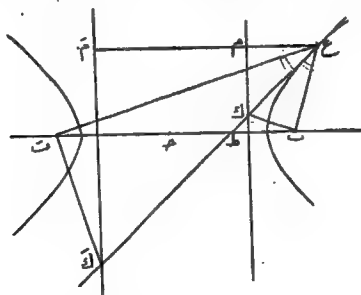
(٤) اذا فرض أن انسانا فى ميدان يسمع فى آن واحد صوت عيار نارى وصوت تصادم المقنوف بالهدف فالمطلوب إيجاد المحل الهندسى لوضع هذا السامع

(٥) اذا علم مركز قطع زائد وطول المحور القاطع ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي للبروتين هو منحنى قطع زائد آخر

٨٢ - النظرية الثانية - المستقيم المماس لمنحنى قطع زائد في أى نقطة

من نقطه يصنع زاويتين متساويتين مع البعدين البوريين لنقطه التماس
نفرض أن التماس في نقطه ع يقطع الدليالين المناظرين للبورتين ب و ج
في نقطتي ك و ل على التناظر

ثم رسم ع م م ا على الدليلين ونصل ب ع و ب ك و ب ن



فيحدث من تشابه المثلثين م ع ك 6 م ع ك أن

$$ع\bar{م} : ع\text{ م} = ع\bar{ك} : ع\text{ ك}$$

۲۰ : ۲۰ =

وواضح أيضا [بمقتضى بند ١٢] أن الزاويتين $\angle C$ و $\angle B$ قائمتان

وحينئذ فالمثلثان ك ب ع ٦ ك ع ب متشابهان ويحدث من تشابههما أن

$$> ب ع ك = > ك ع ب$$

وحينئذ فالمماس في نقطة ع منتصف للزاوية ب ع ب

وحيث أن العمودي على المنحنى عمود على المماس فينتج أن العمودي

منتصف للزاوية الواقعة بين ب ع وامتداد ب ع

وإذا فرض أن المماس في نقطة ع يقطع المحور القاطع في نقطة ط يكون

ع ط منصف للزاوية ب ع ب وإذا يكون ب ط : ب ع = ب ع : ع ب

وإذا فرض أن ع نقطة ما على الفرع المار بالرأس ا يكون ب ع أكبر من

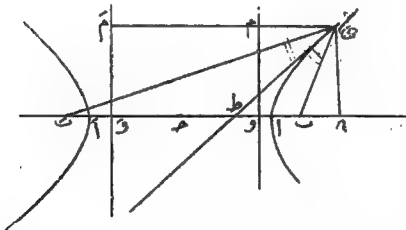
ع ب وبناء عليه يكون ب ط أكبر من ط ب ويلزم أن تكون نقطة ط إذا

واقعة بين ٦ ٦

٤٣ — النظرية الثالثة — إذا كان المماس لمنحنى قطع زائد في نقطة ما

على المنحنى يقطع المحور القاطع في نقطة ط وكان ع ٥ عمودا على المحور يكون

$$٥ ط = ٥ ط ٢$$



وللبرهنة على ذلك نرسم ع م م عمودا على الدليلين

وحيث أن ع ط منتصف للزاوية ب ع ب فيكون

$$ب ط : ط ب = ب ع : ع ب$$

$$= م م ع : ع م = ٥ : ٥$$

وبناء عليه يحدث

$$\angle \text{ط} + \angle \text{ط} : \angle \text{ط} - \angle \text{ط} = \angle \text{ط} + \angle \text{ط} : \angle \text{ط} - \angle \text{ط}$$

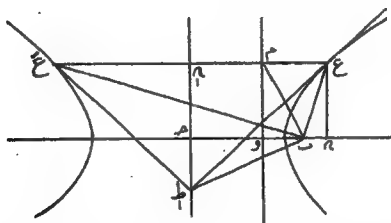
$$\text{أى أن } \angle \text{ط} : \angle \text{ط} = \angle \text{ط} : \angle \text{ط}$$

$$\text{واذا يكون } \angle \text{ط} = \angle \text{ط} = \angle \text{ط}$$

٨٤ — النظرية الرابعة — اذا كان المماس لمنحنى قطع زائدي نقطة

على المنحنى مثل نقطة ع يقطع المحور الغير القاطع في نقطة ط ورسم ع ح عمودا على هذا المحور يكون المستطيل ح ط ح ثابتا

وللبرهنة على ذلك نمد ع ح على استقامته ليقطع المنحنى في نقطة أخرى مثل ع ويقطع الدليل في نقطة م



وحيث ان كل وتر عمودى على المحور غير القاطع ينصفه هذا المحور فينتج كما تقدم في بند ١٨ نتيجة ٢ ان المماسين في تقاطع ع ح يتقاطعان على المحور غير القاطع وحينئذ يتقاطعان في نقطة ط

وواضح اذا [بمقتضى بند ١٠ وبند ١٧] أن م ح ط هما النصفان الداخلى والخارجى للزاوية ع ح ع على التناظر فيكونان اذا متعامدين وبناء عليه يحدث أن

$$\angle \text{ح} \text{ ط} = \text{الزاوية المتممة للزاوية } \angle \text{ح} \text{ م} = \angle \text{م} \text{ و م}$$

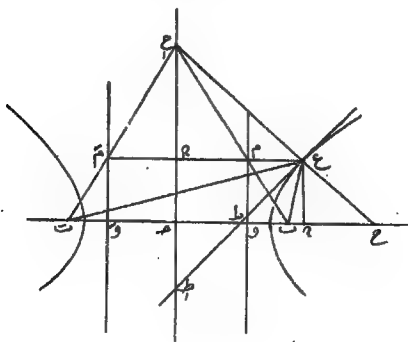
وحينئذ يكون المثلثان القائمان الزاوية ح ط 6 و م متشابهين وينتج
من تشابههما أن

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} &= \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \therefore \end{aligned}$$

٨٥ - النظرية الخامسة - اذا كان العمودى على منحنى قطع زائد

في نقطة مثل ع يقطع المحورين في نقطتي ح و د تكون نسبة ع ح : ع د = ح د : د ع ثابتة وكذلك اذا كان ع د عمودين على المحور القاطع والمحور غير القاطع على التناظر تكون النسبتان ح د : د ع = ح د : د ع ثابتتين وللبرهنة على ذلك فصل نقطة ع بالبوريتين ب و د ثم نرسم من نقطة ع المستقيم ع م م عمودا على الدليلين ومتناهما

وحيث ان المحور غير القاطع منصف لكل من المستقيمين 6 م و 6 ب ،
 فاذا مددنا 6 م على استقامتهما فانهما يتقاطعان على المحور غير القاطع
 وبفرض $ح$ نقطة تقاطعهما وأن $ع$ يقطع المحور غير القاطع في نقطة $ز$



$$\begin{aligned} \text{يحدث} \quad \text{ب} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \\ \therefore \quad \text{ب} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \\ \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \end{aligned}$$

وحيث أن المستقيم $\text{ع} \text{ع}$ منصف للزاوية الواقعة بين $\text{ب} \text{ع}$ و $\text{ع} \text{ع}$ امتداد ع فيلزم أن يكون هو العمودى فى نقطة ع [بمقتضى النظرية الثانية] وينتج من تشابه المثلثين أن

$$\begin{aligned} \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \\ \therefore \quad \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \\ \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ثم} \quad \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \\ \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \\ \text{وأيضاً} \quad \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \\ \text{ع} : \text{ع} = \text{ع} : \text{ع} \end{aligned}$$

٨٦ — النظرية السادسة — محيط الدائرة المار بمرقى قطع زائد وبنقطة ما على منحنيه مثل نقطة ع يمر بنقطتى تقاطع المحور غير القاطع بالمماس والعمودى فى نقطة ع

وللبرهنة على ذلك نفرض أن محيط الدائرة $\text{ب} \text{ع}$ يقطع المحور غير القاطع فى نقطتى $\text{ط} \text{ع}$ وواضح أن هاتين النقطتين فى جهتين متقابلتين من المستقيم $\text{ب} \text{ع}$ ثم نفرض أن $\text{ع} \text{ع}$ فى جهة واحدة من المستقيم $\text{ب} \text{ع}$ وحيث أن $\text{ط} \text{ع}$ منصف للمستقيم $\text{ب} \text{ع}$ وعمود عليه فيكون قطراً للدائرة ويكون القوسان $\text{ب} \text{ط}$ و $\text{ط} \text{ع}$ متساويين وعلى ذلك تكون الزاويتان $\text{ب} \text{ط} \text{ع}$ و $\text{ط} \text{ع} \text{ب}$ متساويتين وحيث أن $\text{ط} \text{ع}$ هو المماس فى نقطة ع

وحيث ان $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ قطر الدائرة فتكون الزاوية $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ قائمة وحينئذ يكون $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ هو العمودى على القطع الزائد فى نقطة $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

نتيجة — حيث ان النقط $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ واقعة على محيط دائرة فيكون $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

وكذلك حيث ان المثلثين $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ متشابهان

فيحدث $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

وحيئذ يكون $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

٨٧ — النظرية السابعة — اذا كان العمودى على منحنى قطع زائد فى نقطة ما منه مثل نقطة $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ يقطع اشور القاطع والمحور غير القاطع فى نقطتي $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ على التناظر ويقطع فى نقطة $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ القطر الموازى للاس فى نقطة $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ يكون $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ ويكون $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

والبرهان على ذلك هو نفس البرهان المقرر فى بند ٧٣

مسائل

- (١) معلوم بورة قطع زائد وطول المحور القاطع ونقطه على المنحنى والمطلوب ايجاد المحل الهندسى للبورة الثانية والمركز
- (٢) معلوم بورة قطع زائد والدليل المناظر لها ومعلوم أيضا أن مستقيما معلوما يمس المنحنى والمطلوب ايجاد البورة الثانية
- (٣) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز قطع زائد اذا علمت احدى بورتية ومس مستقيما معلوما فى نقطة معلومة
- (٤) اذا علمت احدى بورتى قطع ناقص وعلمت نقطتان على المنحنى فالمطلوب ايجاد المحل الهندسى للبورة الثانية والمحل الهندسى للمركز

(٥) المطلوب البرهنة على أن المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان وأن النسبة $\triangle ABC : \triangle DEF$ ثابتة

(٦) المطلوب البرهنة على أن المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان وأن $\triangle ABC = \triangle DEF$

(٧) المطلوب البرهنة على أن المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان وأن $\triangle ABC = \triangle DEF$

(٨) المطلوب البرهنة على أن الزاويتين $\angle A$ و $\angle D$ متكاملتان

(٩) المطلوب إيجاد نقطة E على منحنى قطع زائد بحيث تكون الدائرة BC نهاية صفري

(١٠) المطلوب البرهنة على أن $\triangle ABC = \triangle DEF$ و $\triangle ABC = \triangle DEF$

(١١) اذا فرض أن العمودى على المنحنى فى نقطة E يقطع المحور غير القاطع فى F فالمطلوب البرهنة على أن مسقط E على أحد نصفي القطرين البوريين يساوى نصف المحور القاطع

(١٢) اذا فرض أن أى مماس لقطع زائد يقطع فى نقطة P و Q المماسين من نهايتي المحور القاطع فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة التى قطرها PQ يمر بالبورتين

٨٨ — النظرية الثامنة — اذا كان $\triangle ABC$ عمودا على المحور القاطع AD

لقطع زائد من نقطة A على المنحنى مثل نقطة E فان النسبة $\triangle ABC : \triangle ADE$ تكون ثابتة

لنفرض أن $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ يقطعان أحد الدليلين فى نقطتي K و L على التناظر ثم نصل K و L بالبورة ب المناظرة لهذا الدليل

A geometric diagram illustrating the construction of a hyperbola. Two circles are shown, one centered at point \$T\$ on the left and another centered at point \$C\$ on the right. A horizontal line passes through both centers. A vertical line intersects the horizontal axis at point \$O\$. Several points are labeled: \$T\$, \$C\$, \$K\$, \$L\$, \$M\$, \$N\$, \$P\$, \$Q\$, \$R\$, \$S\$, \$U\$, \$V\$, \$W\$, \$X\$, \$Y\$, \$Z\$. Lines connect various points, forming a network of triangles and other geometric shapes used to define the hyperbola's branches.

$$ع:ا = ك:و$$

و ع: ٢٦ = و ك: ١٦

$$\therefore ١٥٦ : ١٥١ = ١٠٦ : ١٠١ \text{ و } ١٠٦ : ١٠١ = ١٠٦ : ١٠١$$

$$= 2:1.06$$

فمن الواضح إذا أن النسبة ع^٢ : ١٠ : ١٠٠

أى ع: ح: ح - ح

تكون ثابتة لجميع أوضاع نقطة ع.

ثم نفرض لـ ب نصف الوتر البورى الممودى على المحور فتكون النسبة
الثالثة مساوية الى لـ ب $\frac{ب}{ب} = \frac{ب}{ب}$ $\frac{ب}{ب} = \frac{ب}{ب}$

وبناء عليه يحدث $ع٢ : ح٢ = ا٢ : ل٢ = ح٢ : ا٢$

$$ل٢ : ح٢ =$$

$$= ح٢ : ا٢ \text{ [بمقتضى بند ٨٠]}$$

وبالعكس اذا فرضت نقطة ما على امتداد المستقيم $ا١$ مثل نقطة $د$ ورسم $د$ عمودا على $ا١$ بحيث تكون النسبة $د٢ : ا٢ = ا١ : د١$ ثابتة يكون المحل الهندسي لنقطة $ع$ هو منحنى قطع زائد محوره القاطع هو المستقيم $ا١$

(مسألة ١) اذا فرض أن $د$ نقطة خارج محيط دائرة وواقعة على القطر الثابت $ا١$ ورسم $د$ عمودا على $ا١$ ومساويا للاس للدائرة المرسوم من نقطة $د$ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة $ع$ هو منحنى قطع زائد (مسألة ٢) اذا فرض أن $ع$ وترقا لمحيط دائرة معلومة وعمود على القطر الثابت $ا١$ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقطة تقاطع $ا١$ مع $ا٢$ هو منحنى قطع زائد

٨٩ - اذا فرض أن الارتباط

$$ع٢ : د٢ = د٢ : ا٢ = ا٢ : ح٢ = ح٢ : ل٢$$

صحيح لجميع أوضاع الاحداثى الرأسى $ع$ وفرض أن $ا١$ هو طول نصف القطر العمودى على $ا١$ فانه يكون

$$ا٢ : د٢ = د٢ : ا٢ = ا٢ : ح٢ = ح٢ : ل٢$$

ومن ذلك يستنتج أن $ا٢ : د٢ = د٢ : ا٢$ أو $ا٢ : د٢ = د٢ : ا٢$

واذا فالطول التخيلي لنصف المحور الغير القاطع يعينه الارتباط

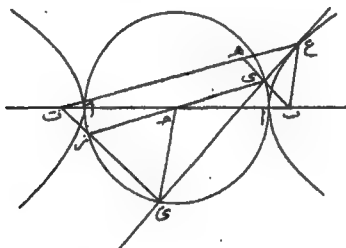
$$ا٢ : د٢ = د٢ : ا٢ = ا٢ : ح٢ = ح٢ : ل٢$$

ويجب أن نلاحظ أن الارتباط بين مربعى المحورين وبين البعد بين البورتين فى القطع الزائد هو نفس الارتباط الموجود فى القطع الناقص

التأويل من بورتي قطع زائد على المماس في نقطة تما على المنحنى واقعان على محيط دائرة ثابتة وأن المستطيل المكوّن من هذين العمودين ثابت

للبهنة على ذلك نفرض $b = 6$ $a = 6$ العمودين النازلين من البورتين على المماس في نقطة c الواقعة على منحني القطع الزائد

ثم فصل ب ع ٦ ا ع ونجد ب ع على استقامته ليقطع ب ع في نقطة
هـ ونصل هـ ع



وحيث ان ϵ = منصف للزاوية $\angle \epsilon$ ه وأن ϵ ه عمود علي ϵ فيكون ϵ = ϵ ه ويكون ϵ = ϵ ه

وحيث أن يكون $\bar{c} = \bar{h} - \bar{e} = \bar{h} - \bar{e} = \bar{e} = \bar{e} = \bar{e}$

وجیٹ ان ی ہ = ح ب ؤ ب ؤ = ع ے ھ۔ فیکون ح ے موازیا

للتقريب $\bar{b} \approx \bar{c}$ ويكون $\bar{c} = \frac{1}{2} \bar{c} = \bar{c} = \bar{c}$!

وإذا فتتة ى واقعة على محيط الدائرة التى مركزها C ونصف قطرها CA

و بمثل هذه الطريقة يمكن البرهنة على أن $\frac{1}{\sqrt{2}}$ مواز للمستقيم BC

ومساو للستقيم ١

مسائل

(١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز قطاع مخروطى معلوم بورتته ويمسه مستقيمان معلومان هو خط مستقيم

(٢) معلوم احدى بورتى قطاع مخروطى وثلاثة مماسات له والمطلوب إيجاد البورة الثانية

(٣) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة المرسومة على المثلث المكوّن من ثلاثة مماسات لقطاع مخروطى لا يمكن أن يمر ببورة هذا المنحنى الا اذا كان قطعاً مكافئاً

(٤) اذا كان وتر دائرة معلومة يقابل زاوية قائمة رأسها فى نقطة معلومة فانه يطلب البرهنة على أن هذا الوتر يمس قطاعاً مخروطياً ثابتاً بورتاه النقطة المعلومة ومركز الدائرة المعلومة

٩١ — اذا كانت ϵ نقطة تماس أحد المماسين المرسومين من البورة β لمحيط الدائرة الأصلية فان المستقيم المرسوم من ϵ عموداً على β يكون بمقتضى عكس النظرية السابقة مماساً لمنحنى القطع الزائد ويكون العمود المقام من ϵ على β ماراً بمركز المنحنى وفضلاً عن ذلك تكون نقطة التماس لهذا التماس هى نقطة تقاطعه مع المستقيم المرسوم من البورة الثانية موازياً للمستقيم β أعنى موازياً للتماس نفسه

واذا فيمكن رسم مماسين للقطع الزائد يمران بالمركز وتقطعنا التماس لهما

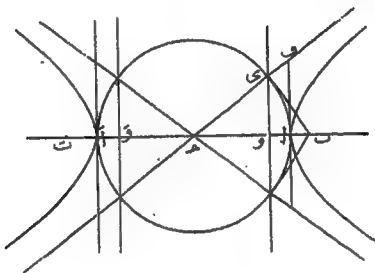
تكونان على بعد لانهائى من المركز

وهذه القضية يمكن استنتاجها أيضاً من بند ٨٣

تعريف - المستقيم الذي يمس منحنيًا ما في نقطة على بعد لانهاى يسمى
(الخط التقريبي) للمنحنى

فإذا فرضنا و موقع الدليل المناظر للبورة يكون $\alpha = \beta$: $\gamma = \delta$: $\epsilon = \zeta$
ومن ذلك يحدث أن المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان وتكون الزاوية
 $\angle A$ و $\angle D$ زاوية قائمة

وإذا فالخطان التقريبان لقطع زائد يمران بنقط تقاطع محيط الدائرة الاصلية مع أحد الدليلين



إذا كان المماس في نقطة الرأس A يقطع الخط التقربي في نقطة F يكون
المثلثان المتشابهان FAB و FAC متساويين لأن $\angle A = \angle A$

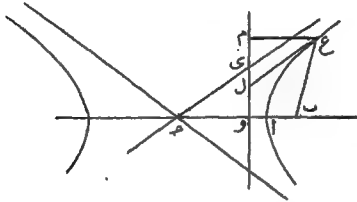
واذا يكون $f = c$ ن ويحدث

$$s = 2 - 1 = 2 - 1 = 1 = 1$$

وتكون الزاوية الواقعة بين الخطين التقريبيين أكبر أو أصغر من زاوية قائمة على حسب ما إذا كان ϵ أكبر أو أصغر من $\frac{\pi}{2}$

ومتى كان $s = \infty$ يكون الخطان التقريبان متعامدين ويسمى القطع الزائد في هذه الحالة قطعاً زائداً قائماً

٩٢ — ويجب أن يلاحظ أن البعدين البوريين لنقطة ما على منحنى قطع زائد مساويان لبعدي هذه النقطة عن الدليلين مقاسين بالتوازي لأحد الخطين التقريبيين



وللبرهنة على ذلك نفرض ع نقطة ما على منحنى قطع زائد ونرسم ع م عمودا على الدليل ول م ك ع ل موازيا لأحد الخطين التقريبيين فيكون المثلث ل ع م مشابها للمثلث د ح و

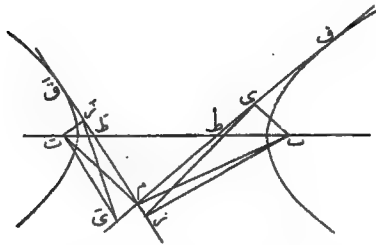
ويحدث ل ع : ع م = د ح : ح و = أ د : د = ح ب : ع م
 \therefore ل ع = ح ب

٩٣ — النظرية العاشرة — نقطة تقاطع مماسين لقطع زائد متعامدين واقعة على محيط دائرة ثابتة

وللبرهنة على ذلك نفرض ع ك موقعي العمودين النازلين من البوريين ب ك على مماس ما فتكون النقطتان ع ك واقعتين على محيط الدائرة الأصلية

وبناء عليه اذ فرض ان المماس العمودي على ع يقطع ع د في نقطة ط يكون هذا المماس موازيا لستقيم ب د أو لستقيم ب د

٩٤ — النظرية الحادية عشرة — المستقيمان المرسومان من نقطة ما مثل نقطة م مماسين لمنحنى قطع زائد بورتاه ب ك ب متساويا الميل على منصفى الزاوية ب م ب



وللبرهنة على ذلك نرسم ب ي ك ب ي عمودين بوريين على م ن ونرسم ب ن ك ب ن عمودين بوريين على م ن ثم نصل ي ك ن وكذلك ي ك ن
وحيث أن يكون المستقيمان ب ي ك ب ي متوازيين وفي جهتين متقابلتين
وكذلك يكون ب ن ك ب ن متوازيين وفي جهتين متقابلتين
ومن ذلك يحدث أن الزاويتين ب ن ك ب ي ب ن ك ب ي متساويتان
ولكن ب ي ب ي = ب ن ب ن = ب ن ب ن
∴ ب ي : ب ن = ب ن : ب ي
وحيث أن يكون المثلثان ب ن ك ب ي متشابهان وتكون
 $\angle ب ن ك = \angle ب ي ب$

وحيث أن الزاويتين ب ي م ك ب ن قائمتان فتكون النقط ب ك ي ك ن م واقعة على محيط دائرة وحيث أن الزاويتان ب ن ي ك ب م إما متساويتان أو متكاملتان وكذلك الزاويتان ب ي ن ك ب م إما متساويتان أو متكاملتان

وبناء عليه فالزاويتان $\angle م ي ك$ و $\angle م ن ك$ إما متساويتان أو متكاملتان
وكذلك الزاويتان $\angle م ن ك$ و $\angle م ي ك$ إما متساويتان أو متكاملتان
وإذا فرضنا أن المماسين يقطعان المحور القاطع في نقطتي $\angle ط ك ط$ على التناظر
تكون النقطتان $\angle ط ك ط$ واقعتين بين $\angle م ي ك$ و $\angle م ن ك$ وحينئذ تكون الزاويتان
 $\angle م ط ك$ و $\angle م ط م$ متساويتين وبناء عليه فالمنصف الداخلي والمنصف الخارجي
للزاوية $\angle م ن ك$ هما أيضا المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية $\angle ط م ط$

خواص الأقطار

٩٥ — تقدم البرهان على أن المحل الهندسي للنقط المنصفة لجملة أوتار
قطاع مخروطي متوازية هو خط مستقيم مازي مركز المنحنى يسمى قطر المنحنى وتقدم
البرهان أيضا على أن المماسين في نهايتي وتر ما يتقاطعان على القطر المنصف
لهذا الوتر وأن المماسين في نهايتي قطر ما موازيان لجميع الأوتار التي ينصفها
هذا القطر

الأن هناك فرقا عظيما بين القطع الناقص والقطع الزائد وهو أن كل قطر
من أقطار القطع الناقص لابد أن يقطع المنحنى في نقطتين حقيقيتين وليس
الأمري كذلك في كل أقطار القطع الزائد

إذا رسم مماس لقطع زائد في نقطة ما على المنحنى مثل نقطة $\angle ع$ وقطع
أحد الدليلين في نقطة $\angle ك$ فمن الواضح أن $\angle ك$ يقابل زاوية قائمة رأسها
في البؤرة المناظرة للدليل وحينئذ يلزم أن يكون $\angle ب ع ك$ أصغر من $\angle ك$

فإذا فرض أن إلتقط الموازي للس في نقطة $\angle ع$ يقطع المنحنى في نقطة $\angle و$
فمن حيث أنه لا يوجد جزء من المنحنى بين الدليلين يكون المستقيم $\angle و ب$
قاطعا للدليل في نقطة مثل $\angle ل$ بين $\angle ك و$ وكذلك حيث أن $\angle ح$ مركز
المنحنى

فيكون u قاطعا للمنحنى في نقطة أخرى مثل v بحيث يكون

$$u = v = u$$

وحيث أن u مواز للماس في نقطة c فبمقتضى تعريف المنحنى يلزم أن نحصل على النتيجة الآتية

$$b:c = c:d = d:l = l:v = v+u = u+u : u+l+u$$

$$\text{ولكن } b:c = d:e \text{ وحيث أن } u+u = u+u : u+l+u$$

ولكن هذا مستحيل إذ أن l واقعة بين u و u

وبناء عليه فالقطر الموازي للماس لقطع زائد في نقطة ما على المنحنى مثل

نقطة c لا يمكن أن يقطع المنحنى في نقط حقيقية

وإذا فكل قطرين متراوجين في قطع زائد يقطع أحدهما فقط المنحنى

في نقط حقيقية

٩٦ — النظرية الثانية عشرة — إذا كان القطار c لقطع زائد

منصفا لجميع الأوتار الموازية للقطار d يكون القطار d منصفا لجميع الأوتار الموازية للقطار c

أنظر بند ٦٦

٩٧ — النظرية الثالثة عشرة — المستقيمان الواصلان بين أى نقطة

من قطع منحنى القطع الزائد وبين نهايتى أى قطر من أقطاره موازيان للقطرين المتراوجين

أنظر بند ٦٧

٩٨ — النظرية الرابعة عشرة — إذا كانت أضلاع متوازي أضلاع

تس منحنى قطع زائد فقطاره يكونان قطارين متراوجين في القطع الزائد

أنظر بند ٦٨

٩٩ - قياس الخطوط - لكي نفهم خواص القطع الزائد حق الفهم يلزمنا أن لاقتصر على معرفة أجزاء المستقيمت فقط بل يجب أن نراعي جهة قياس هذه الأجزاء

وتعين جهة أى جزء من المستقيم بترتيب وضع الحرفين الدالين على نهايته فمثلا إذا قيل أ ب فإن هذا يدل على أن الخط مقاس من أ الى ب وإذا قيل ب أ فإنه يدل على أن الخط مقاس من جهة ب الى جهة أ

وإذا تعددت أجزاء المستقيم الواحد فتعتبر كل الأجزاء المأخوذة في جهة واحدة موجبة وبناء على ذلك تعتبر الأجزاء المأخوذة في الجهة الأخرى سالبة

وليس من الضروري أن تخصص إحدى الجهتين لأن تكون هي الموجبة لعدم أهمية ذلك ومن البديهي أن $أ ب + ب أ = ٠$

والارتباط $أ ب + ب ح = أ ح$ صحيح لجميع أوضاع أ ب ب ح على خط مستقيم

وفي الحقيقة يقصد من هذا الارتباط أن المسافة بين أ ب وكذلك المسافة بين ب ح تساويان المسافة بين أ ح وهذا بديهي مهما كان ب بالنسبة للنقطتين أ ب

ثم ان المستطيل المكوّن من جزئى مستقيم في جهة واحدة يعتبر موجبا والمستطيل المكوّن من جزئى مستقيم في جهتين متضادتين يعتبر سالبا وإذا $أ ب + ب ح = أ ح$

وإذا لاحظنا هذه القواعد اتضح لنا التناظر بين خواص القطع الناقص وخواص القطع الزائد

مثال ذلك قد برهنا في بند ٨٤ على أن $\alpha = \beta$ مع فرض أن $\alpha = 6$ و $\beta = 6$ مرسومين في جهة واحدة وحينئذ يكون $\alpha = \beta$ $= - \alpha = -\beta$ [بند ٨٩] وبناء عليه في القطع الزائد كما في القطع الناقص يكون $\alpha = \beta$ مساويا لمربع نصف المحور غير القاطع

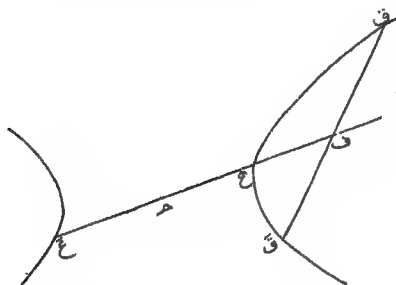
١٠٠ — وتقدم البرهان في بند ٢٤ على أن النسبة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء أى وترين لقطع زائد متقاطعين وموازيين على التناظر لمستقيمين معلومين تكون ثابتة لجميع أوضاع نقطة التقاطع . وإذا كانت هذه الخطوط مارة بمركز القطع الزائد فإن النسبة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء أى وترين للقطع الزائد تساوى النسبة بين مربعى نصفى القطرين الموازيين لهما

وإذا فرض أن المستطيل المكوّن من جزئى أحد الاوتار موجب [انظر بند ٩٩] والمستطيل المكوّن من جزئى الوتر الثانى سالب كان أحد نصف القطرين الموازيين للوترين حقيقيا والآخر تخيليا ولكن اذا فرض أن كلا المستطيلين موجب أو كلاهما سالب كان كلا نصفى القطرين الموازيين للوترين حقيقيا أو كلاهما تخيليا

١٠١ — النظرية الخامسة عشرة — اذا كان α و β احدائيا رأسيا للقطر $\alpha = \beta$ في القطع الزائد تكون النسبة $\alpha : \beta = \alpha^2 : \beta^2$ ثابتة وللبرهنة على ذلك نمد α و β على استقامته ليقطع منحى القطع الزائد في نقطة أخرى مثل نقطة γ فحيث أن α و β مواز للباس في نقطة γ فتكون نقطة γ وسط المستقيم $\alpha\beta$.

وواضح [بمقتضى بند ١٠٠] أن النسبة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء وترى قطع زائد مرسومين في جهتين معلومتين ثابتة.

وحينئذ $ف ق . ف ق : ف ع . ف ع$ ثابت
أعني أن $ق ف : ق ف : ح ف - ح ع$ ثابت



وإذا فرضنا أن هذه النظرية لا تزال صحيحة إذا تقاطع الوتران في المركز
وفرضنا أن $ق ح$ نصف القطر الموازي للمستقيم $ق ع$ مع علمنا أن طول
هذا المستقيم تخيلي يحدث ما يأتي

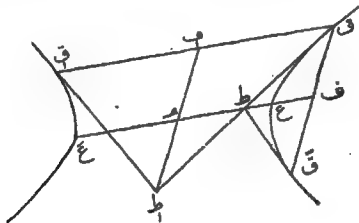
$$ق ف : ق ف : ح ف - ح ع = ق ع : ق ع$$

$$أو ق ف : ق ف : ح ف - ح ع = ق ع : ق ع$$

وبالعكس إذا رسمنا مستقيما مثل $ق ف$ في جهة ثابتة ليقطع المستقيم
الثابت $ق ع$ في نقطة $ف$ بحيث تكون النسبة $ق ف : ق ع . ف ع$
ثابتة يكون المحل الهندسي لنقطة $ق$ هو منحنى قطع زائد أو منحنى قطع ناقص
على حسب ما إذا كانت نقطة $ف$ خارج أو داخل المستقيم المحدود $ق ع$

نتيجة — إذا فرضت نقطة كمتمطة $س$ على الاحداثي الرأس $ق ف$
للقطر الثابت $ق ع$ في القطع الزائد بحيث تكون النسبة $ق ف : ق ف$ ثابتة
يكون المحل الهندسي لنقطة $س$ هو منحنى قطع زائد آخر قطره $ق ع$

وإذا كان المماسان للنحنى في تقاطع β γ اللتين هما نهايتا وتر قاطع
للنحنيين معا يتقابلان في نقطة δ يكون δ γ منصفاً للمستقيم β γ .
وإذا فرض أن β γ مواز إلى δ γ فإن المماسين في تقاطع β γ
يتقابلان في نقطة δ الواقعة على القطر δ γ الموازى للمستقيم β γ



١٠. = ح ف' - ح ع' (بمقتضى الحالة الاولى)

$$\therefore \text{ب.ح.ط} : \text{و.ف.ا} = \text{ح.ع} : \text{ح.ف.ا} - \text{ح.ع}$$

== ح:٢: و ق:٢ [بمقتضى النظرية الخامسة عشرة)

وحيث ان $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \frac{d}{dt}$ او $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \frac{d}{dt}$

١٠٣ - النظرية السابعة عشرة - طول الوتر البورى للقطع الزائد يتغير بنسبة مربع نصف القطر الموازى له

البرهان على هذه النظرية هو نفس البرهان المقرر ببند ٧٧ سواء كانت
نهايتا الوتر البوري واقعتين على فرع واحد من فرعي القطع الزائد أولا

١٠٤ — النظرية الثامنة عشرة — اذا قطع محيط دائرة منحني قطع زائد في أربع نقط فان المستقيم الواصل بين أى نقطتين من نقط التقاطع والمستقيم الواصل بين النقطتين الأخرين يصنعان زوايا متساوية مع محوري القطع الزائد

والبرهان المقرر في بند ٧٨ ينطبق هنا تماما ومع ذلك فيجب ملاحظة أنه حيث ان القطرين الموازيين للوترين متساويان فيلزم أن يكونا حقيقيين معا أو تخيليين معا وعليه فان كلا الوترين اما أن يقطعوا فرعى منحنى القطع الزائد أو لا يقطعوه واحد منهما وإذا فالتقط الاربعة التى تنشأ من تقاطع محيط الدائرة بمنحنى القطع الزائد يلزم أن تكون كلها واقعة على فرع واحد من فرعى منحنى القطع الزائد أو يكون اثنان منها على فرع واثنان على الفرع الآخر

مسائل

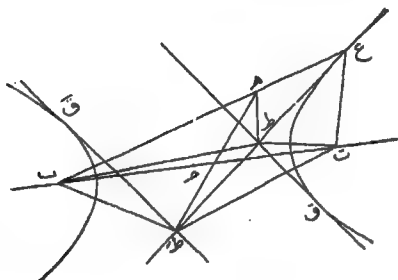
(١) إذا رسم متوازي أضلاع في منحنى قطع زائد فالمطلوب البرهنة على أن أقطار المتوازي الاضلاع هي أقطار للقطع الزائد

(٢) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة لا يمكن أن يقطع منحني التقاطع الزائد في أكثر من أربع نقاط

والبرهنة على ذلك تفرض $\text{و} \text{ك}$ و ق نقطتي التماس للمستقيمين المتوازيين ثم نصل $\text{ب} \text{ط}$ $\text{ك} \text{ب}$ $\text{ك} \text{ق}$ $\text{ب} \text{ق}$ $\text{ك} \text{ط}$ $\text{ب} \text{ق}$ ثم نأخذ نقطة على $\text{ب} \text{ع}$ مثل نقطة هـ بحيث يكون $\text{ع} \text{هـ} = \text{ع} \text{ب}$ ثم نصل

$\text{هـ} \text{ط}$ $\text{هـ} \text{ق}$

فحيث ان ط ط⁻ منصف للزاوية ه ع ب ك ع ه = ع ب فيكون
ط ه = ط ب ويكون ط⁻ ه = ط⁻ ب وحيث ان ه ط ط⁻
ك ب ط ط⁻ متساويان



وبناء عليه تكون د ه ط ط⁻ = د ب ط ط⁻
= د ب ط ن [بمقتضى النظرية الحادية عشرة]

$$\therefore د ب ط ه = د ب ط ن$$

وكذلك تكون د ب ط⁻ ه = د ب ط⁻ ن

$$\text{ولكن } د ب ط ن = د ب ط ن$$

لان ط ن ك ط⁻ ن متوازيان

$$\therefore د ب ط ه = د ب ط ن$$

واذا ب ك ط⁻ ك ط⁻ ه واقعة على محيط دائرة وحيث ان يكون

$$ع ط . ع ط⁻ = ع ه . ع ب = ع ب . ع ب$$

نتيجة — حيث ان قطري المتوازي الأضلاع الذي تكون أضلاعه
مماسية لمنحنى قطع زائد هما قطران متزاوجان فيمكن وضع النظرية في المنطوق
الآتي

إذا فرض أن المماس لمنحنى قطع زائد في نقطة ع يقطعه قطران متزاوجان
أيا كانا في تقاطع ط ٦ ط^٢ يكون

$$ع ط \cdot ع ط = ع ط \cdot ع ط$$

وحيث أن الخط التقريبي هو في اتجاه القطرين المتزاوجين المنطبقين
فينتج أنه إذا كان المماس في نقطة ع قاطعا للخط التقريبي في نقطة ل
يحدث أن $ع ط \cdot ع ط = ع ط \cdot ع ط$

وواضح مما تقدم أن الجزء من أي مماس لمنحنى قطع زائد الذي يحدده
مماسان متوازيان أو قطران متزاوجان يقابل زاويتين متساويتين رأساهما
في البورتين

مسائل

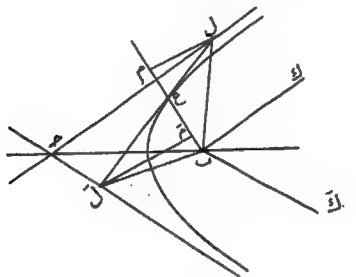
(١) إذا كان المماس في نقطة ما مثل نقطة ع على منحنى قطع زائد بورتاه
ب ٦ ط يقطعه قطران متزاوجان أيا كانا في تقاطع ط ٦ ط^٢ على التناظر
فانه يطلب البرهنة على أن المستطيل المكوّن من العمودين النازلين على ب ع
من ط ٦ ط ثابت

(٢) إذا فرض أن مماسا ما لمنحنى قطع زائد يقطعه المماسان المتعامدان
في تقاطع ط ٦ ط^٢ فانه يطلب البرهنة على أن الدائرة المارة بنقطتي ط ٦ ط^٢
وباحدى البورتين تساوى الدائرة الأصلية

(٣) إذا فرض أن مماسا ما لمنحنى قطع زائد يقطعه مماسان متوازيان
في تقاطع ط ٦ ط^٢ فانه يطلب البرهنة على أن الدائرة المارة بنقطتي ط ٦ ط^٢
وباحدى البورتين لا يمكن أن تكون أقل من الدائرة الأصلية

خواص الخطوط التقريبية

١٠٦ — النظرية العشرون — الجزء من المماس لمنحنى قطع زاوية المحصور بين الخطين التقريبيين تنصفه نقطة التماس
 للبرهنة على ذلك نفرض أن المماس لمنحنى القطع الزائد في نقطة ع يقطع الخطين التقريبيين في نقطتي ل ك
 ثم نصل ع بالبورة ب ونرسم ك موازيا للخط التقريبي ح ل
 ثم نرسم من ل ك ل المستقيمين ل م ك ل م عمودين على ب ع فيكون
 الخط التقريبي ح ل هو مماس نقطة تماسه على بعد لانهائي وحيث ك ل
 يصنع زاويتين متساويتين مع ع ب ك [بند ١٧]



وإذا فالعمود النازل من نقطة ل على ع ب يساوى العمود النازل من ل على ب ك وبالضرورة يكون مساويا للعمود النازل من ب على ح ل المساوى للمستقيم س ح [بمقتضى بند ٩٤]

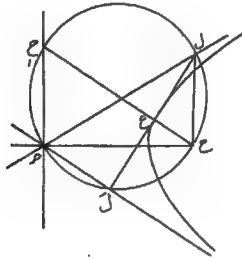
وإذا $ل م = س$

وكذلك $ل م = س$

وحيث ان العمودين ل م ك ل م متساويان فيكون ل ع = ع ل

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة المرسومة على المثلث
المكوّن من مماس ما لمنحى قطع زائد ومن الخطّين التقريبيين يمر بنقط
تقاطع العمودى المناظر للمماس مع المحور

وللبرهنة على ذلك نفرض أن المماس يقطع الخطّين التقريبيين فى نقطتي $ل$ و $ل'$
ونفرض أن $ل$ محيط الدائرة $ل$ $ل'$ يقطع المحور القاطع والمحور غير القاطع
فى نقطتي $ع$ و $ع'$ على التناظر ونفرض أن $ع$ هى نقطة تقاطع $ع$ و $ع'$ مع $ل$ $ل'$



فيحدث أن $دع ل + ع د ل = د ع ل + ل د ع$

$= د ل د + ل د ع$

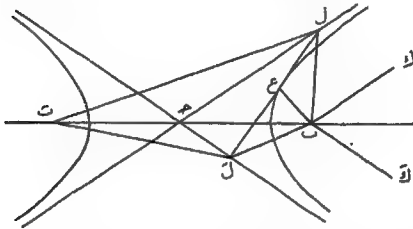
$=$ زاوية قائمة

وبناء عليه يكون $ع$ عمودا على $ل$

وحيث أن القطر $ع$ فى الدائرة $ل$ عمود على الوتر $ل$ فيلزم أن
يكون منصفاً لهذا الوتر فى نقطة $ع$

ومن هنا تكون $ع$ نقطة التماس للمماس $ل$ وحينئذ يكون $ع$ هو
العمودى فى نقطة $ع$

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن الجزء من المماس لمنحنى قطع زائد المحصور بين الخطين التقريبيين يقابل زاويتين متكاملتين رأسهما في البورتين للبرهنة على ذلك نفرض أن المماس في نقطة ع يقطع الخطين التقريبيين في نقطتي ل ك على التناظر ثم نرسم من نقطة ب المستقيمين ب ك ب ك موازيين للخطين التقريبيين ونصل ب ع فيكون ل ب منصفاً للزاوية ع ب ك ك ل ب منصفاً للزاوية ع ب ك

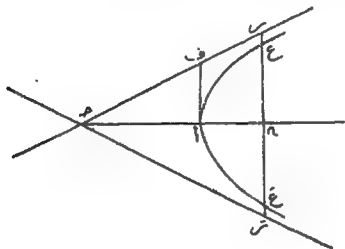


وحينئذ يحدث أن $\angle ب ل ك = \angle ب ك ل + \angle ب ك ع = \angle ب ك ل$
 $\angle ب ك ل = \angle ب ل ك$
 وإذا $\angle ب ل ك = \angle ب ك ل$ وكذلك $\angle ب ك ل = \angle ب ل ك$

وبناء عليه فالزاويتان $\angle ب ل ك$ $\angle ب ك ل$ متكاملتان وإذا حيث ان
ب ك ب في جهتين متقابلتين بالنسبة للمستقيم ل ك فتكون النقط الأربع
ب ك ب ك ل واقعاً على محيط دائرة

(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ل ب ل ك ب متشابهان
 (مسألة ٤) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ل ب ب ك ب متشابهان
 وأن ل ب ك ب = ل ب ك ب

١٠٧ — النظرية الحادية والعشرون — إذا مد ضعف الاحداثى الرأسى E لـ E للحدود القاطع فى منحى قطع زائد على استقامته ليقطع الخطين التقريبيين فى نقطتي S و S' يكون $S'E = S'E' = S'E = S'E'$ $E = E'$ برهانه — لنفرض أن المماس فى نقطة الرأس A يقطع أحد الخطين التقريبيين فى نقطة F فيثبت [بمقتضى بند ٩٤] يكون $A'F = E = E'$


$$1p:2p = 1s:2s$$

$$1\text{ } \partial : 1\text{ } \partial - 1\text{ } \partial = 1\text{ } \partial : 1\text{ } \partial - 1\text{ } \partial \quad \therefore$$

[بمقتضى بند ۸۸] = ۵ : ۷

وعليه يكون $s - r = e - r$ أو $s = e$ \square

ولكن حيث ان نقطة ω هي منتصف المستقيمين vv_6 vv_7

فمن الواضح أن $e = e \circ e = e \circ e \circ e = \dots$

وعليه يكون $\bar{e}_r \cdot \bar{e}_r = \bar{e}_s \cdot \bar{e}_s = 1$ و $\bar{e}_r \cdot \bar{e}_s = 0$

نتيجة — حيث ان المستطيل $س ع ٠ ع س$ غير متغير $ك ع س$ يزداد الى ما لا نهاية بازدياد $د$ فيستنتج أن $س ع$ ينقص الى ما لا نهاية بازدياد $د$

وحيث ان يتضح أن الخط التقريبي يقرب من المنحنى قربا لانهايا ولكن لا يقطعه أبدا

١٠٨ — النظرية الثانية والعشرون — اذا قطع مستقيم منحنى قطع زائد في النقطتين مثل $ع ك ع$ وقطع الخطين التقريبيين في نقطتين مثل $ط ك ط$ فان المستطيل $ع ط ٠ ع ط$ يكون مساويا لمربع نصف القطر الموازي لهذا المستقيم ويكون $ط$ مساويا الى $ط ع$

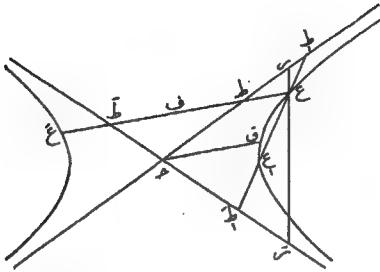
وللبرهنة على ذلك نرسم من نقطة $ع$ عمودا على المحور القاطع فيقطع الخطين التقريبيين في $س ك س$ على التناظر

وواضح [بمقتضى النظرية الحادية والعشرين] أن المستطيل $ع س ٠ ع س$ ثابت ومساو لمربع نصف القطر الموازي للمستقيم المذكور

ولكن اذا رسم الوتر $ع ط ك ع$ في أى اتجاه معلوم فكل من المثلثين $س ع ط ك س$ يكون غير متغير وحيث ان يكون $ع س$: $ع ط$ ثابتا وكذلك $ع س$: $ع ط$ ثابت لجميع أوضاع نقطة $ع$

وبناء عليه تكون النسبة بين المستطيل $ع ط ٠ ع ط$ والمستطيل $ع س ٠ ع س$ ثابتة ومعلوم أن المستطيل $ع س ٠ ع س$ ثابت

واذا فالمستطيل $ع ط ٠ ع ط$ ثابت لجميع أوضاع نقطة $ع$ بفرض أن $ع ط$ مرسوم في اتجاه معين



واذا رسمنا الوتر من نقطة $و$ الواقعة على منحنى القطع الزائد بحيث يكون $و = ح$ موازيا للوتر $ع ط$ يكون

$$ع ط \cdot ع ط = و = ح$$

واذا قطع الوتر $ع ط$ فرعين مختلفين من منحنى القطع الزائد فان القطر الموازي له يقطع المنحنى في نقط حقيقتين

ومع ذلك اذا رسمنا من نقطة $ع$ مستقيما يقطع فرعا واحدا من المنحنى في نقطتين مثل $ع ك$ على التناظر ويقطع الخطين التقريبيين في نقطتين مثل $ط ك$ على التناظر أيضا فان القطر الموازي له يقطع المنحنى في نقط تخيلية ولكن المستطيل $ع ط \cdot ع ط$ لا يزال مساويا لمربع نصف القطر الموازي للخط القاطع ولكن في هذه الحال يكون كل من المستطيل $ع ط \cdot ع ط$ ومربع نصف القطر الموازي سالبا

واذا قطع الوتر $ع ط$ منحنى القطع الزائد في نقطة أخرى مثل $ع$ وكانت $ف$ منتصف المستقيم $ع ط$ يكون

$$ع ط \cdot ع ط = ع ط \cdot ع ط$$

$$\therefore ع ف^2 - ط ف^2 = ع ف^2 - ط ف^2$$

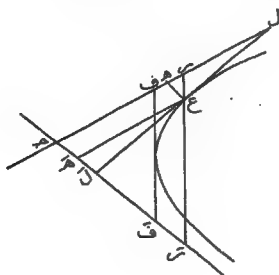
ولكن ط ف = ف طَ حينئذ ع ف = ف عَ وبناء عليه تكون نقطة
وسط ط طَ هي وسط ع عَ أيضا وحينئذ يكون ع ط = طَ عَ

وفي الحالة الخصوصية التي فيها يكون الوتر في وضع فيه تطبق النقطتان
ع ك عَ على بعضهما فان النقطة المتوسطة للخط ط طَ تطبق على ع أو
عَ وهذا برهان آخر للنظرية العشرين

نتيجة — اذا كان المماس في نقطة ع يقطع الخطين التقريبيين في ل ك لَ
وكان ح م هو نصف القطر الموازي للخط المذكور يكون
 $ح م = ل ع = لَ ع$
لأن ل ع = لَ ع

١٠٩ — النظرية الثالثة والعشرون — مساحة المثلث المكوّن من
الخطين التقريبيين ومن مماس لقطع زائد ثابتة

وللبرهنة على ذلك نفرض أن المماس في نقطة ع يقطع الخطين التقريبيين
في نقطتي ل ك لَ ثم نرسم ع ه ك ع هَ موازيين للمستقيمين ح ل ك لَ
فيقطعان ح ل ك لَ في ه ك هَ على التناظر ثم ننزل عمودا من نقطة ع
على المحور القاطع فيقطع ح ل ك لَ في نقطتي س ك سَ على التناظر



وحيث ان كلا من المثلثين هـ ع ر هـ ع ر هـ ع ر ذو شكل ثابت
فتكون النسبتان ع هـ : ع ر هـ : ع ر هـ ثابتتين وحيث ان
ع هـ : ع ر هـ : ع ر هـ ثابت
ومن المعلوم ان ع ر هـ : ع ر هـ : ع ر هـ
[بمقتضى النظرية الحادية والعشرين]

وحيث ان يكون ع هـ : ع ر هـ : ع ر هـ ثابتا ولكن بما ان نقطة ع هي منتصف
الخط ل ل هـ ع ر هـ موازيان للخطين ح ل هـ ع ر هـ على التناظر
فيكون ح ل هـ : ع ر هـ : ع ر هـ
واذا يكون ح ل هـ : ع ر هـ : ع ر هـ = مقدار ثابتا
وحيث ان مساحة المثلث ل ل هـ ع ر هـ تكون ثابتة

واذا كان المماس في نقطة الرأس قاطعا للخطين التقريبيين في تقطعي ف هـ ف
على التناظر فن المعلوم ان ح ف = ح ف = ح ف
وعليه يكون ح ل هـ : ع ر هـ : ع ر هـ = ح ف = ح ف = ح ف
وأياضا ع هـ : ع ر هـ : ع ر هـ = ح ل هـ : ع ر هـ : ع ر هـ
ويمكن البرهنة على ذلك بطريقة أخرى فنقول
حيث ان ح هي منتصف المستقيم ب ت فيكون
٣ ل ل هـ ع ر هـ = ٥ ل ل هـ ع ر هـ - ٥ ل ل هـ ع ر هـ
= ٢ ل ل هـ ع ر هـ - ٢ ل ل هـ ع ر هـ
= ب ع ر هـ - ب ع ر هـ = ٢ ع ر هـ [بمقتضى بند ١٠٦]
= ٢ ع ر هـ

أو بطريقة أخرى هكذا

القط ل ل هـ ع ر هـ : ع ر هـ : ع ر هـ واقعة على محيط دائرة [بمقتضى بند ١٠٦ مسألة ٢]

ثم نفرض أن الدائرة ل ب ل ب تقطع الخط التقريبي حل في نقطة ثانية مثل ل
وحيث أن ح هي منتصف ب ب ٦ وأن حل ٦ حل يصنعان مع ب ب
زاويتين متساويتين فضلا عن كون هذين المستقيمين في جهة واحدة بالنسبة
للمستقيم ب ب فيكون حل = حل
وحينئذ يكون حل . حل = حل . حل = ب ب . ح ح

مسائل

(١) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علم الخطان التقريبان وعامت
نقطة على المنحنى

(٢) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علم خط تقريبي وعامت ثلاث
نقط منه

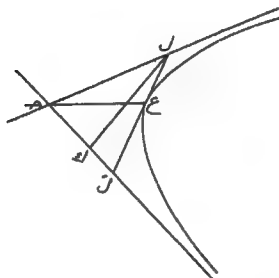
(٣) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علم خط تقريبي وعامت تقطعتان
على المنحنى ومماس في احدى التقطعتين

(٤) اذا تحرك مستقيم بكيفية بحيث ان المثلث المكون منه ومن
مستقيمين ثابتين تكون مساحته ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن هذا المستقيم
دائما يمس منحنى قطع زائد ثابت والمطلوب البرهنة أيضا على أن المحل
الهندسي للنقطة التي تقسم بنسبة معلومة الجزء من المستقيم المتحرك الذي
يحدده المستقيمان الثابتان هو منحنى قطع زائد أيضا خطاه التقريبان هما
المستقيمان الثابتان

(٥) اذا فرض أن مماسين لمنحنى قطع زائد يقطعان الخطين التقريبيين
في ل ٦ وفي م ٦ م على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ل م ٦ ل م
موازيان لوتر تماس المماسين المذكورين وعلى بعدين متساويين منه

١١٠ - النظرية الرابعة والعشرون - مجموع مربعي القطرين المتراجعين في قطع زائد ثابت

وللبرهنة على ذلك نفرض أن المستقيم المماس لقطع زائد في نقطة منه مثل ع
يقطع الخطين التقريبيين في ل 6 ل على التناظر فن الواضح إذن ان نقطة ع
هي منتصف المستقيم ل ل



وكذلك اذا كان لك عمودا على حـل من نقطة ل يكون

وحيث أن يكون $ح_1 = ح_2 = ح_3$ - $ع_1 - ع_2$

ولكن من المعلوم أن \mathcal{H} . \mathcal{H} ثابت وأنه من حيث أن المثلث
 \mathcal{H} ثابت الشكل فيكون \mathcal{H} متغيرا بتغير \mathcal{H} وحينئذ فالمستطيل
 \mathcal{H} . \mathcal{H} ثابت

وبناء عليه يكون $\angle ع - \angle ل$ ثابتا ولكن [بمقتضى نتيجة النظرية الثانية والعشرين] يكون $\angle ل = \angle د - \angle د$
 بفرض ان $\angle د$ هو نصف القطر الموازى للاستقيم $ل ع ل$ وعليه يكون
 $\angle ع + \angle د = \angle د$ ثابتا.

١١١ - اذا علم قطران متراوجان في منحنى قطع زائد يمكن تعيين المحورين والبورتين وغير ذلك

لذلك نفرض ان $\angle ع - \angle ع$ هو القطر المعلوم الذى يقطع المنحنى في نقطتين حقيقيتين ونفرض ان $\angle ك$ هو اتجاه القطر المزاج فيكون القطر $\angle ك$ قاطعا للمنحنى في نقطتين تخيليتين مثل $\angle د$ بحيث يكون $\angle د$ مساويا لمربع معلوم فيكون المستقيم المرسوم من $ع$ موازيا للاستقيم $\angle ك$ هو المماس في نقطة $ع$. واذا اخذنا على هذا المماس نقطتين مثل $ل$ و $ك$ متساويتي البعد من نقطة $ع$ بحيث يكون

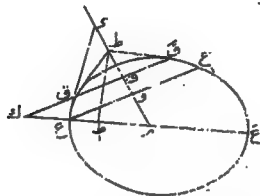
$$\angle ل = \angle ع = \angle د - \angle د$$

تكون $ل$ و $ك$ واقعتين على الخطين التقريبيين وبذلك نكون قد عينا الخطين التقريبيين وهما $\angle ل$ و $\angle ك$ وأما المحوران فهما منصف الزاوية $\angle ل$ ويكون المحور القاطع هو منصف الزاوية التي تقطع $ع$ بين ضلعيها ثم نأخذ على الخطين التقريبيين نقطتين مثل $ك$ و $ل$ بحيث يكون

$$\angle ك = \angle ل = \angle د . \angle ل$$

فيكون $\angle ك$ هو المماس للقطع الزائد في احدى رؤوسه ويكون $\angle ك = \angle ب$ واذا فالدائرة التي مركزها $ع$ ونصف قطرها $\angle ك$ تقطع المحور القاطع في البورتين

١١٢ - النظرية الخامسة والعشرون - إذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة ليقطع قطاعاً مخروطياً فان المماسين في نقطتي التقاطع يتقاطعان على مستقيم ثابت



لنفرض U و V وتراهما مرسوما من النقطة الثابتة K ولنفرض أن المماسين في U و V يتقاطعان في نقطة P فيكون P منصفا للوتر UV في نقطة F ثم نرسم PF موازيا للقطر المزوج للقطر CK فيقطع CK في نقطة P .

فأولاً - إذا فرض أن h ك يقطع المنحنى في نقطتين حقيقيتين مثل h
 6 ع - نرمس h موازياً للوتر h ونفرض أن المماسين في h 6 ع
يتقاطعان في نقطة s فنكون هذه النقطة واقعة على القطر h ويكون
 h ف . h ط = h د . h و بفرض h نقطة تقاطع h ع مع h ط

حيث ان ط ط مواز للمستقيم ع ، فيكون

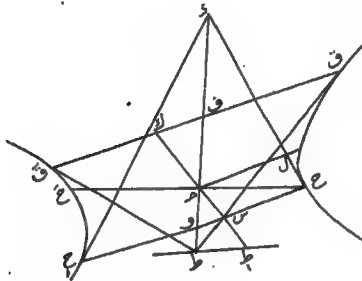
$$s \cdot d : b \cdot d = c \cdot d : \frac{b}{1} \cdot d$$

ح و : ح ف لأن ح ف ، ح ط = ح و ، ح و

ح = ع : ح ك لأن ع و 6 ك ف متوازيان

و بناء عليه يكون $\dot{C} = \dot{C}_1$ وإذا فنقطة \dot{C}_1 ثابتة (*)

وثانياً - إذا فرض أن δ لا يقطع المنحنى في نقطتين حقيقيتين فإن القطر المزاوج للمستقيم δ لك يقطعه في نقطتين حقيقيتين وليكونا ϵ و ϵ' ثم نفرض أن ϵ وتر مواز للمستقيم ν وقاطع للمستقيم τ في ω وقاطع للمستقيم κ في ϕ فيكون المماسان في نقطتي ϵ و ϵ' متقاطعين على τ في نقطة مثل نقطة λ بحيث يكون $\omega\delta = \phi\delta = \tau\delta$ [بمقتضى بند ١٠٢]



ثم نفرض أن المماس في نقطة ϵ يقطع القطر الموازي للوتر ν في نقطة λ بحيث أن $\delta\lambda = \delta\epsilon$ قطران متوازيان فيكون المستطيل $\epsilon\lambda\delta\epsilon'$ ثابتاً لجميع اتجاهات الوتر ν [بمقتضى بند ١٠٥]

وحينئذ يكون $\delta\epsilon = \delta\kappa = \omega\delta = \phi\delta$

$$\delta\epsilon = \delta\tau = \delta\lambda = \delta\phi = \delta\omega = \delta\epsilon'$$

$$\delta\epsilon = \delta\tau = \delta\lambda = \delta\phi = \delta\omega = \delta\epsilon'$$

لأن المثلثين ط ح ط ٦ ح ز ح أضلاعهما متوازية وإذا فهما متشابهان
ومنه ينتج أن ح ك ح ط = ح ز ح ط = ح ز ح ط = ح ز ح ط = ح ز ح ط
مقداراً ثابتاً . وإذا فنقطة ط ثابتة وبناء عليه تكون نقطة ط واقعة على
مستقيم ثابت .

تعريف — المستقيم الذى هو المحل الهندسى لنقطة تقاطع المماسين
لقطاع مخروطى المرسومين من نهايتى أى وتر مار بنقطة ثابتة يسمى المحور
القطبي لهذه النقطة بالنسبة للمنحنى وتسمى النقطة الثابتة قطب هذا المستقيم
بالنسبة للمنحنى أيضاً ومن السهل استنتاج عكس هذه النظرية فنقول

إذا أخذت نقطة ما على مستقيم معلوم ورسم منها مماسان لقطاع مخروطى
فإن المستقيم الواصل بين نقطتى التماس يمر بنقطة ثابتة

إذا فرضت نقطة ك خارج المنحنى فانه يمكن رسم مستقيمين منها يقطع كل
منهما المنحنى فى نقطتين منطقتين وهذان المستقيمان هما المماسان من نقطة ك
وعند ما ينطبق النقطتان و ٦ و ٦ تنطبق عليهما نقطة تقاطع المماسين المرسومين
من و ٦ و ٦ وإذا فإذا فرضت نقطة خارج منحنى مثل نقطة ك فإن المماسين
فى نهايتى أى وتر مار بها يتقاطعان على المستقيم الواصل بين نقطتى التماس
للمماسين المرسومين من نقطة ك

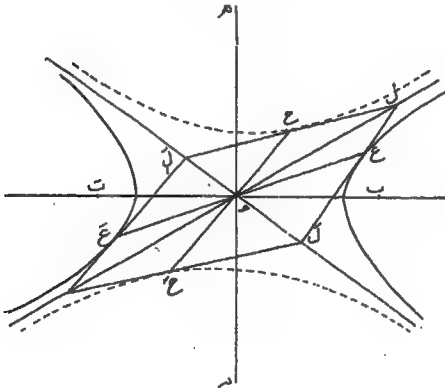
نتيجة ١ — المحور القطبي لنقطة ثابتة بالنسبة لقطاع مخروطى يقطع
المنحنى فى نقطتين حقيقتين أو لا يقطعه على حسب ما إذا كانت النقطة
الثابتة خارج المنحنى أو داخله

نتيجة ٢ — إذا كان المحور القطبي لنقطة مثل نقطة ا بالنسبة لقطاع
مخروطى يمر بنقطة ب فإن المحور القطبي لنقطة ب يمر بنقطة ا

القطع الزائد المزاوج

١١٣ - القطعان الزائدان اللذان لهما خطان تقريبان مشتركان وبورهما على بعد واحد من المركز المشترك يسميان قطعين زائدين متناظرين أو متزاوجين. وحيث أن محوري القطع الزائد منصفان للزاويتين الواقعتين بين الخططين التقريبيين فتكون محاور القطعين الزائدين المتزاوجين منطبقين بمعنى أن المحور القاطع لأحد المنحنيين يكون هو المحور غير القاطع للمنحنى الثانى

لنفرض نقطة مثل نقطة ع على منحنى قطع زائد بورناه ب ك ب و فرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الخططين التقريبيين فى ل ك ل على التناظر



ثم نرسم من نقطة ل المستقيم ل ع ل مماسا للقطع الزائد المناظر فى نقطة ع ويقطع الخط التقريبي ح ل فى نقطة ل فتكون نقطة ع منتصف ل ل ويكون ح ل . ل ل = ح ه^٢ بفرض ه^٢ إحدى بورق القطع الزائد المناظر

وحينئذ يكون $ل = ٠ = ٦ = ه = ٢ = ب = ل = ٠ = ل$

$$\therefore ل = ٠ = ل$$

ولكن $ل = ٠ = ل = ل = ل$ وإذا يكون $ع = ل$ موازيا

للأس $ل = ل = ل$ موازيا للأس $ل = ل$

فيتضح إذا أن القطعين الزائدين المتراجعين اقطارهما المزدوجة منطبقة وأن القطر الذي يقطع أحد المنحنيين في نقط حقيقية منطبق على القطر الذي يقطع المنحنى الثانى في نقط تخيلية

وحيث أن $ع = ل$ متوازى اضلاع فيكون المستقيم $ع = ل$ وكذلك $ع = ل$ موازيا لأحد الخطين التقريبيين وينصفه الخط التقريبي الآخر

وواضح أن مساحة متوازى الاضلاع المكون من المماسين في نهايتى القطر $ع = ل$ لأحد المنحنيين ومن المماسين في نهايتى الوتر المزاوج فى المنحنى المناظر تساوى أربعة أمثال المثلث $ل = ل$ وإذا فهى ثابتة

وحيث أن $ع = ل$ فبمقتضى بند ١١٣ يكون $ع = ل - ع = ل$ ثابتا فيتضح إذا أن الفرق بين مربع أى قطر من أقطار القطع الزائد ومربع القطر المزاوج فى القطع الزائد المناظر ثابت

القطع الزائد القائم

١١٤ — إذا قطع دليل قطع زائد قائم الخطين التقريبيين $ح = ك = ح$ فى نقطى $ح = ك$ على التناظر وكانت $ب$ هى البؤرة المناظرة لهذا الدليل فبمقتضى بند ٩١ تكون كل من الزاويتين $ب = ح = ك = ح$ قائمة ومنه ينتج أن الشكل $ب = ح = ك = ح$ مربع وأن $ب = ٢ = ح = ٢ = ك$ وحينئذ فالاختلاف المركزى للقطع الزائد القائم يساوى ٢٢

١١٥ — النظرية السادسة والعشرون — القطران المتزاوجان

في قطع زائد يصنعان مع الخط التقريبي زاويتين متساويتين

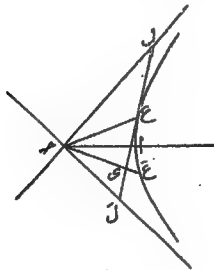
لإبرهنة على ذلك نفرض أن المماس في نقطة ما مثل نقطة ع يقطع
الخطين التقريبيين في نقطتي ل و ل'

نحيث أن الزاوية ل ح ل' قائمة و ع منتصف ل ل' [بمقتضى بند ١٠٦]
فتكون ع مركز الدائرة ل ح ل' وتكون الزاويتان ع ح ل و ع ح ل'
متساويتين وإذا كان ح م هو القطر المزاوج للقطر ح ع والموازي بناء
على ذلك للمستقيم ل ل' فيكون ح ع و ح م صانعين زاويتين متساويتين
مع كل من الخطين التقريبيين

نتيجة — الزوايا الواقعة بين أي قطرين أو أي وترين لقطع زائد قائم
أما مساوية أو مكملة للزوايا الواقعة بين القطرين المزاوجين لهما

١١٦ — النظرية السابعة والعشرون — مجموع مربعي القطرين

المتزاوجين أو القطرين المتعامدين في قطع زائد قائم يساوى صفرا



لنفرض أن المماس في نقطة مامثل ع يقطع الخطين التقريبيين في ل و ل⁻
فن المعلوم بمقتضى النظرية الثانية والعشرين أن مربع ح^١ الذى هو نصف
القطر المزاج للاستقيم ح ع يساوى - ع ل^٢

ولكن الزاوية ل ح ل⁻ قائمة و نقطة ع منتصف ل ل⁻ فينبذ يكون
ع ل = ح ع وبناء عليه يكون ح ع^١ + ح ع^٢ = ح ع^٢ - ع ل^٢ = ٠

ثم نفرض أن ح ع⁻ هو نصف القطر الموضوع بحيث تكون الزاويتان
ع⁻ ح^١ و ح^١ ع⁻ متساويتين ونفرض أن ح ع⁻ يقطع ل ع ل⁻ في نقطة ي
فيحدث $\angle ي ح ع + \angle ي ع ع⁻ = ٢ > ٢ + \angle ع > \angle ع ح ل$
 $= ٢ > \angle ح ل =$ زاوية قائمة

فينبذ يكون ح ع⁻ عمودا على ل ع ل⁻

وحيث ان ح ع^١ و ح ع^٢ متساويا الميل على المحور القاطع فيكون ح ع
= ح ع⁻ واذا يحدث ح ع^٢ + ح ع^٢ = ح ع^٢ + ح ع^٢ = ٠

وحيث لا يوجد في القطاع المخروطى سوى زوجين من الأقطار المتساوية
وكل اثنين من هذه الاقطار متساويا الميل على المحور فينتج أنه اذا كان
مجموع مربعي قطرين في قطع زائد قائم يساوى صفرا فيلزم أن يكون القطران
اما متزاوجين أو متعامدين

وبالعكس اذا كان في قطاع مخروطى (١) مجموع مربعي قطرين متزاوجين
يساوى صفراً أو (٢) مجموع مربعي قطرين متعامدين يساوى صفراً فالقطاع
في كل من هاتين الحالتين هو قطع زائد قائم

ويلزم أن يكون القطاع قطعاً زائداً لان طول أحد القطرين حقيقى
والثانى تخيلى

لنفرض ϵ احدى نهايتي القطر الحقيقي ونفرض أن المماس في نقطة ϵ يقطع الخطين التقريبيين في $ل$ $ك$

ففي الحالة الاولى حيث ان

$$\epsilon = \epsilon' - \epsilon'' = \epsilon' \text{ ل فيكون } \epsilon = ل = \epsilon' = \epsilon''$$

واذا فالزاوية $ل$ $ك$ يلزم ان تكون قائمة

ولاثبات الحالة الثانية نقول اذا فرض أن ϵ هو القطر الحقيقي ورسم $ك$ ϵ عمودا على ϵ ليقطع الخطين التقريبيين للمنحنى في $ك$ $ك'$ على التناظر فمن المعلوم أن ϵ $ك$ \times ϵ $ك'$ يساوى ϵ' وهو مربع نصف القطر الموازى للمستقيم $ك$ ϵ $ك'$ واذا فيكون بمقتضى الفرض $ك$ ϵ $ك'$ $\epsilon' = \epsilon' - \epsilon'' = \epsilon'$

وحيث ان ϵ عمود على $ك$ ϵ $ك'$ $ك$ ϵ $ك'$ $\epsilon' = \epsilon'$

فينتج أن الزاوية $ك$ ϵ $ك'$ قائمة

(مسألة ١) المطلوب رسم قطع زائد قائم اذا علم المركز ونقطتان على المنحنى

(مسألة ٢) المطلوب رسم قطع زائد قائم اذا علم خط تقربى ونقطتان على المنحنى

(مسألة ٣) المطلوب رسم قطع زائد قائم اذا علمت نقطتان على المنحنى وعلم المماسان في هاتين النقطتين

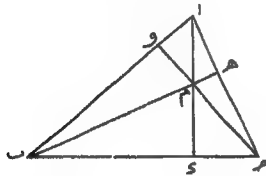
١١٧ — النظرية الثامنة والعشرون — كل وتر من أوتار القطع

الزائد القائم يقابل زاويتين متساويتين أو متكاملتين رأساهما في نهايتي أى قطر من أقطاره

وذلك لأنه إذا رسم القطع الزائد القائم الذى قطره ab ويمتز بأحد أوضاع النقطة المتحركة فمن السهل البرهنة على أن كل وضع آخر لهذه النقطة المتحركة يكون على هذا القطع الزائد

١١٨ — النظرية التاسعة والعشرون — اذا كان قطع زائد قائم يمر برؤوس مثلث فانه يمر أيضا بنقطة تقاطع الاعمدة النازلة من الرؤوس على الاضلاع وبالعكس كل منحن يمر برؤوس مثلث وبنقطة تقاطع الاعمدة النازلة من الرؤوس على الاضلاع فهو قطع زائد قائم

لنفرض $ا س ب هـ$ وأعمدة نازلة من رؤوس المثلث $ا ب ح$ على الاضلاع المقابلة لها ونفرض أنها تتقاطع في نقطة $م$



فمن الواضح أن المستطيلين $ب س د هـ$ و $ا س م د$ متساويان ثم نفرض أن المستقيم $ا$ يقطع القطع الزائد القائم المار بالرؤوس الثلاثة $ا ب ح$ في نقطة أخرى مثل $ع$ وحيث أن مجموع مربعي القطرين المتعامدين يساوى صفرا فيلزم أن يكون $ا س ع = ا س ب - ا س د = ب س د$

واذن يكون $ا س م = ا س ع = ا س د$ أى أن نقطة $ع$ يلزم أن تكون منطبقة على نقطة $م$ وبالعكس اذا فرض أن قطاعا منحروطين يمر بالرؤوس الثلاثة $ا ب ح$ وبنقطة $م$ فهو قطع زائد قائم لأنه حيث أن

$$ا س د = ا س ب - ب س د$$

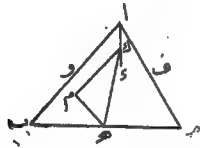
فينتج أن مجموع مربعي اى قطرين متعامدين يساوى صفرا وذلك لايتأتى الا اذا كان المنحنى قطاعا زائدا قائما [بمقتضى النظرية السابعة والعشرين]

نتيجة — جميع المنحنيات المارة بنقط تقاطع قطعين زائدين قائمين
هى قطاعات زائدة قائمة

١١٩ — النظرية الثلاثون — المحل الهندسى لمراكز القطاعات الزائدة
القائمة المرسومة على مثلث هو دائرة التسع النقط لهذا المثلث

لنفرض ΔABC رؤوس المثلث الثلاثة S نقطة تقاطع الارتفاعات
فن المعلوم أن كل قطع زائد قائم ماز بالنقط الثلاثة A, B, C يمر كذلك
بنقطة S

ولنفرض أن H, F, G, K هى النقط المنصفة للمستقيات
 BC, CA, AB, AK على التناظر



فحيث ان الزاوية الواقعة بين أى وترين مساوية أو مكملة للزاوية الواقعة
بين القطرين المزاوجين لها فإذا فرض أن M هى مركز أحد القطعين الزائدين
القائمين فتكون الزاوية H, M, K مساوية أو مكملة للزاوية الواقعة بين B, C
 A, S وهى زاوية قائمة وإذا تكون M واقعة على محيط الدائرة التى قطرها
 H, K وهى دائرة التسع النقط فى المثلث ABC

(مسألة ١) المطلوب إيجاد مركز القطع الزائد القائم الذى يمر بأربع نقط
معلومة

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن دوائر التسع النقط فى المثلثات
الأربعة التى رؤس كل منها ثلاث نقط من أربع نقط معلومة تتقابل فى نقطة

الأشكال النهائية للقطاعات المخروطية

١٢٠ — قد اعتبرنا في كل ماتقدم أن بورة القطاع المخروطى على بعد محدود من الدليل ولكن قد لا يكون الامر كذلك فعند ما تكون البورة على الدليل والاختلاف المركزى أكبر من الوحدة من الواضح أن المنحنى فى هذه الحالة يكون عبارة عن مستقيمين مارين بالبورة وهذان المستقيمان يقربان من الانطباق كلما قرب الاختلاف المركزى من الوحدة

واذا فيمكن اعتبار المستقيمين المتقاطعين قطعاً زائداً بورتاه ومركزه هي نقطة تقاطعهما ودليله أحد النصفين للزوايا الواقعة بينهما وكذلك يمكن اعتبار المستقيمين المنطبقين على بعضهما قطعاً مكافئاً

ويجب أن نلاحظ أن الدائرة عبارة عن قطاع مخروطى دليله فى ما لانهاية وبورتاه منطبقتان على مركز الدائرة واختلافه المركزى يساوى صفراً وكذلك يمكن اعتبار المستقيمين المتوازيين قطعاً مكافئاً كل من بورته ودليله على بعد فى ما لانهاية

مسائل

(١) من نقطة ثابتة مثل نقطة ب قد رسم المستقيم ب ع ليقطع محيط دائرة ثابتة فى نقطة ع ثم رسم ع د بحيث تكون الزاوية ب ع د ذات مقدار معلوم والمطلوب البرهنة على أن ع د يغلف منحنياً احدى بورتيه نقطة ب ثم إيجاد البورة الثانية

(٢) من نقطة على منحنى قطع زائد مثل نقطة ع قد رسم مستقيم مواز لاحد الخطين التقريبيين فقطع الخط التقربى الثانى فى نقطة م ومن نقطة مثل نقطة ن قد رسم مستقيم مواز للخط التقربى الثانى فقطع الخط التقربى الأول فى نقطة د والمطلوب البرهنة على أن م د مواز للمستقيم ع د

(٣) اذا فرض أن المماس لقطع زائد في نقطة منه مثل ϵ يقطع أحد الخطين التقريبيين في نقطة τ ورسم τ و ϵ موازيا للخط التقريبي الثاني يقطع المنحنى في نقطة ν وقطع المستقيم المرسوم من ϵ موازيا للخط التقريبي الأول في ϵ فالمطلوب البرهنة على أن ν هي منتصف $\tau \epsilon$

(٤) اذا فرض ان مماسا لقطع زائد في نقطة ما مثل ϵ يقطع خطا تقريبا في نقطة τ ثم رسم ϵ و τ موازيا لهذا الخط التقريبي يقطع أحد الدليلين في ν وقطع $\tau \epsilon$ في ϵ مع فرض أن τ هي البؤرة المناظرة لهذا الدليل فالمطلوب البرهنة على أن ϵ منتصف $\tau \epsilon$

(٥) اذا فرض أن منحنيا ذا محور قاطع معلوم له بؤرة منطبقة على بؤرة قطع مكافئ معلوم وفرض أنه يمس منحنى القطع المكافئ فالمطلوب البرهنة على ان هذا المنحنى يمس أيضا قطعا مكانا آخر مشتركا مع القطع المكافئ المعلوم في المحور والبؤرة

(٦) اذا رسمت جملة منحنيات قطاعات مخروطية ذات بؤرة مشتركة ومحاورها القاطعة مساوية لمستقيم معلوم ومراكزها واقعة على محيط دائرة ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن جميع هذه المنحنيات تمس منحنيين ثابتين

(٧) المطلوب إيجاد مركز ومحور قطع زائد قائم اذا علمت إحدى بؤرتيه وخط تقريبي ومماس آخر

(٨) المطلوب رسم القطاعات الزائدة التي لها بؤرة معاومة وتمر بنقطة معلومة والتي خطوطها التقريبية موازية لمستقيمين معلومين

(٩) اذا رسم خط مستقيم في اتجاه معلوم ليقطع قطعين زائدين ثابتين مشتركين في الخطين التقريبيين في النقطتين ϵ و ν والنقطتين τ و ν على التناظر فالمطلوب البرهنة على ان المستطيل $\epsilon \nu \tau \epsilon$ ثابت

(١٠) ع د عبارة عن راسي نقطة من منحنى قطع زائد قائم مثل نقطة ع ٦ د ه هو المماس للدائرة الاصلية والمطلوب البرهنة على أن ع و يمر باحدى راسي القطع الزائد

(١١) اذا رسمت مماسات متوازية لحملة دوائر مارة بنقطتين معلومتين فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقط التماس هو قطع زائد قائم

(١٢) اذا رسمت جملة أزواج من دوائر متساوية تمر بنقطتي ا ٦ ب ونقطتي ا ٦ ج على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن نقطة التقاطع الثانية واقعة على قطع زائد قائم مآز بالنقط ا ٦ ب ٦ ج واحد أقطاره هو المستقيم ب ج

(١٣) اذا فرض أن نقطة تتحرك بحيث أن المستقيمين الواصلين بينها وبين نقطتين ثابتتين يصنعان مع مستقيم ثابت زاويتين متساويتين فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لهذه النقطة هو قطع زائد

(١٤) اذا رسم مثلث متساوى الاضلاع في قطع زائد قائم فالمطلوب البرهنة على أن مركز الدائرة المرسومة عليه واقع على منحنى القطع الزائد المذكور

(١٥) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقط تقاطع دائرتين متساويتين يمر بهما مستقيمان متوازيان معلومان في نقطتين ثابتتين مثل ا ٦ ب ٦ ج على التناظر مركزاهما في جهة واحدة من ا ٦ ب هو قطع زائد قائم

(١٦) اذا رسم متوازي أضلاع في قطع زائد قائم فالمطلوب البرهنة على أن المستطيل المكون من العمودين النازلين من نقطة ما من المنحنى على ضلعين متوازيين يساوى المستطيل المكون من العمودين النازلين من هذه النقطة على الضلعين الموازيين الآخرين.

(١٧) اذا فرضت نقطتان مثل ع ٦ د على قطع زائد قائم والقطع الزائد المناظر له على التناظر بحيث يكون ع و مقابلا لزاوية قائمة رأسها المركز

المشترك فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمتصف ϵ ν هو قطع زائد قائم آخر خطاه التقريبان هما محورا المنحنيين الاصليين

(١٨) اذا رسم مماسان لقطع زائد في تقاطع تقاطعه بمستقيم مماس للقطع الزائد المناظر الاول فالمطلوب البرهنة على أن نقط تقاطع المماسات الثلاثة واقعة على القطع الزائد المناظر

(١٩) المطلوب البرهنة على أن الاوتار المشتركة بين قطع زائد ودائرة أيا كانت يمكن أن تتجمع أزواجا بحيث تقطع الخططين التقريبيين في نقط جميعها على محيط دائرة وأن هذه الدوائر مشتركة مع الدائرة الاولى في المركز

(٢٠) اذا فرض أن العمودين على قطاع مخروطى في تقاطع ν ϵ ν يتقاطعان على زوايا قائمة في نقطة ϵ ويقطعان المنحنى في نقطتين أخريين مثل ν ϵ ν على التناظر. فالمطلوب البرهنة على أن ν ν مواز للمستقيم ν ϵ ν

(٢١) اذا فرض أن مستقيما يقطع الخططين التقريبيين لقطاع مخروطى في تقاطع ν ϵ ν ويقطع أى قطرين متزاحين في ϵ ϵ ν وكانت ν ϵ ν متتصف ν ϵ ν فالمطلوب البرهنة على أن ν ϵ ν = ν ϵ ν

(٢٢) اذا رسم قطع زائد بوترته بورة قطع زائد معلوم ودليله مماس للقطع الزائد المعلوم أيضا وكان المحور غير القاطع لهذا المنحنى مماسا له فالمطلوب البرهنة على أن المنحنيين متشابهان

(٢٣) اذا رسم من نقطة ما على قطع زائد مماس للدائرة الأصلية فالمطلوب البرهنة على أن هذا المماس يساوى نصف المحور الأصغر للقطع الناقص المشترك مع المنحنى الأول في البور ومار بالنقطة المذكورة

(٢٤) اذا فرض أن المماسين لقطع زائد في نهايتي وترهما يتقاطعان في نقطة ν ورسم ν ϵ ν موازيين للخططين التقريبيين فقطعا في ν ϵ ν المماسين المذكورين فالمطلوب البرهنة على أن ν ϵ ν مواز للوتر المذكور

(٢٥) اذا فرض أن محيط دائرة يقطع قطعاً زائداً قائماً في ع ك ع ك و
ك و ف المطلوب البرهنة على أن المماسين في ع ك ع يتقاطعان على القطر
العمودي على و و

(٢٦) اذا رسم مستقيم جيماً انمق من نقطة معلومة مثل نقطة ع ليقطع
مستقيمين ثابتين في نقطتي و ك و على التناظر وأخذت نقطة ع على
هذا المستقيم بحيث يكون و ع = ع و ف المطلوب البرهنة على أن المحل
الهندسي لنقطة ع هو قطع زائد

(٢٧) اذا فرض أن مستقيماً يمر بنقطة ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن المحل
الهندسي لمتصف جزء المستقيم المحدود بمستقيمين معلومين هو قطع زائد

(٢٨) اذا كان ط و ك ط و مماسين لقطع زائد قائم مركزه نقطة ح
وكان المنصفان للزاوية و ط و يقطعان و و في نقطتي د ك و ف المطلوب
البرهنة على أن ح د و ح ه المنصفان للزاوية و ح و

(٢٩) اذا فرض أنه من نقطة ثابتة مثل نقطة ك رسم الوتر ع و في قطع
زائد ورسم ع ل ك و ل موازيين للخطين التقريبيين فالمطلوب البرهنة
على أن المحل الهندسي لنقطة ل هو قطع زائد خطاه التقريبان موازيان
للخطين التقريبيين. للقطع الزائد المعلوم ومركزه النقطة الثابتة ك

(٣٠) اذا فرضت ع نقطة ما على قطع زائد بورتاه ب ك ه وكان المماس
في نقطة ع قاطعاً لأحد الخطين التقريبيين في نقطة ط فالمطلوب البرهنة على
أن الزاوية الواقعة بين الخط التقريبي والمستقيم ه ع هي ضعف الزاوية ب ط ع

(٣١) اذا فرض أن مماسين لقطع زائد من نقطة ما مثل نقطة ك يقطعان
أحد الدليلين في نقطتي ط ك و ط وكانت ب هي البورة المناظرة لهذا الدليل
فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة التي مركزها نقطة ك ويمسها المستقيمان

ب ط ٦ ب ط ٦ تقطع هذا الدليل في نقطتين بحيث يكون نصف القطرين
الواصلين اليهما من المركز موازيين للنقطتين التقريبيين
(٣٢) المطلوب رسم قطع زائد يمر برؤس متوازي أضلاع معلوم ويكون
أحد خطيه التقريبيين في اتجاه معلوم

(٣٣) إذا فرض أن أ ٦ ب ٦ > ثلاث نقط ثابتة فالمطلوب البرهنة على
أنه يمكن رسم قطعين مكافئين يمران بالنقطتين أ ٦ ب وبورتهما نقطة > وأن
محورى هذين المنحنيين موازيان للنقطتين التقريبيين للقطع الزائد الذى يمكن
رسمه مارا بنقطة > وبورتاهما النقطتان أ ٦ ب

(٣٤) إذا رسمت دائرة تمر بنقطتى ع ٦ ع ٦ وهما نهايتا قطرها في قطع
زائد قائم وتقطع في ط المستقيم المماس للمنحنى في ع فالمطلوب البرهنة على أن
ع ٦ ط والمماس للدائرة في نقطة ع يتقاطعان على القطع الزائد المذكور
(٣٥) إذا فرض أن المماس لقطع زائد قائم في نقطة ثابتة يقطع أى
قطرين متزاحجين مثل ح ط ٦ ح ط ٦ في ط ٦ ط ٦ فالمطلوب البرهنة على
أن المحل الهندسى لمركز الدائرة ح ط ٦ هو خط مستقيم

(٣٦) إذا فرض أن ع ٦ ع ٦ قطر حيثما اتفق في قطع زائد قائم ٦ و نقطة
على المنحنى ثم رسم ع ٦ ع ٦ ع ٦ عمودين على ع ٦ ع ٦ و على التناظر
قطعا في نقطتى ع ٦ ع ٦ العمود على المنحنى في نقطة و فالمطلوب البرهنة
على أن و ع ٦ ع ٦ متساويان

(٣٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لبوز القطاعات المخروطية
التي تمسها الاضلاع الأربعة لمتوازي أضلاع هو قطع زائد قائم

(٣٨) إذا رسمت دائرة وقطع زائد قائم على المثلث القائم الزاوية أ ب ح
بفرض أن ح هي الزاوية القائمة وكان المماس للدائرة في نقطة ح قاطعا للقطع
الزائد في ح ٦ فالمطلوب البرهنة على أن المماسين للقطع الزائد في ح ٦ ح ٦
يتقاطعان على أ ب

(٣٩) إذا فرض أن المماسين لقطاع مخروطي معلوم من نقطة يصنعان زاويتين متساويتين مع مستقيم معلوم فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقطة يلزم أن تكون واقعة على قطع زائد قائم ماز بيورتي المنحني الأول

(٤٠) المطلوب إيجاد مركز قطع زائد قائم إذا علمت ثلاث نقط على المنحني والمماس في أحدها

(٤١) إذا فرض أن ك ط هو المماس في نقطة ك للمنحني قطع زائد قائم مركزه ح وأن ع د وتر يقطع في نقطة ط المماس المذكور بالتعامد فالمطلوب البرهنة على أن منصفى الزاوية ك ح ط ينصفان المستقيمين ك ع ك د
(٤٢) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنقط تقاطع المستقيمت المماسية لقطع ناقص والتي تصنع زوايا متساوية مع المحور الأكبر والمحور الأصغر على التناظر ولكنها غير متعامدة هو قطع زائد قائم رأساه بورتا القطع الناقص المذكور

(٤٣) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسي لنهايات الاقطار المتوازية لجملة دوائر ذات محور مشترك هو قطع زائد قائم

(٤٤) إذا رسم مربع على محيط دائرة وفرض أن مماسا ما لهذه الدائرة يقطع ضلعين متوازيين من أضلاع هذا المربع في نقطتي ع ك د وأن مماسا آخر موازيا للاول يقطع ضلعى المربع الآخرين في نقطتي ر س ه فالمطلوب البرهنة على أن الأربع نقط ع ك د ر س ه واقعة على قطع زائد قائم مار بمركز الدائرة ومركزه على محيط الدائرة

(٤٥) إذا فرض أن الوتر ع ح في قطع زائد يقطع الخطين التقريبيين في ر س ه وفرض أن ح ط ف هو القطر المنصف لهذا الوتر في نقطة ف وأن ط ه نقطة تقاطع المماسين في نهايتي الوتر فالمطلوب البرهنة على أن متوازي الاضلاع الذى قطره ط ف وأضلاعه موازية للخطين التقريبيين

تكون رأسه الأخرى واقعة على المنحنى وقطره الثانى مواز للمستقيم ع ع⁻ وأنه هو الثالث المتناسب مع الخطين ر ر⁻ ف ٦ ع ف

(٤٦) اذا فرضت جملة نقط على قطر ثابت فى قطاع مخروطى ذى مركز وأزلت منها أعمدة على محاورها القطبية فالمطلوب البرهنة على أن المحل الممتسى لمواقع هذه الأعمدة هو قطع زائد قائم

(٤٧) اذا فرض أن ع ع⁻ قطر قطع زائد قائم وأن محيط الدائرة التى مركزها نقطة ع ونصف قطرها ع ع⁻ يقطع المنحنى فى ١ ٦ ب ٦ ح فالمطلوب البرهنة على أن ١ ٦ ب ٦ ح مثلث متساوى الأضلاع

(٤٨) المطلوب رسم قطع زائد اذا علمت ثلاث نقط على المنحنى واتجاهها الخطيين التقريبيين

(٤٩) اذا رسم محيط دائرة مار بالبورة ب لمنحنى قطع زائد اختلافه المركزى يساوى ٢ ومار بالرأس الثانية ٦ لهذا المنحنى قطعه فى ٦ ٦ ع ٦ د ٦ ر فالمطلوب البرهنة على أن ع د ر مثلث متساوى الأضلاع

(٥٠) اذا علم خط تقربى لقطاع مخروطى وعلمت نقطتان منه فالمطلوب البرهنة على أن المحورين ينقلان قطعاً مكافئاً .

(٥١) اذا فرض أن قطاعاً مخروطياً يمس الأضلاع الثلاثة ب ح ٦ ح ٦ ا ٦ ب للمثلث ا ب ح فى ع ٦ د ٦ ر على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ا ع ٦ ب ٦ د ٦ ر متقابل فى تقطعه

(٥٢) اذا فرض ان قطاعاً مخروطياً يمس الأضلاع الثلاثة ب ح ٦ ح ٦ ا ٦ ب للمثلث ق ا فى ع ٦ د ٦ ر على التناظر وفرض ان المستقيمتين ر ر⁻ ع ٦ ع ٦ د ٦ ح تقطع ب ح ٦ ا ٦ ب على التناظر فى ل ٦ م ٦ ن فالمطلوب البرهنة على أن ل ٦ م ٦ ن واقعة على خط مستقيم

(٦٠) اذارسم المستقيمان ط ع ك ط ع من نقطة ما مثل ط ورسم منها ايضا مماسان لقطاع مخروطي واحد من نقطة ما مثل ط ورسم منها ايضا المستقيمان ط د ك ط د مماسين لمنحن آخر متحد مع الأول في البور فالمطلوب البرهنة على ان ع ك ع د متساويا الميل على المماس في نقطة ع

(٦١) اذا فرض ان ع ك ع د وترا التماس لزوجين من المماسات المرسومة من نقطة ط لكل من قطاعين مخروطيين متحدين في البور وبورتاهما ب ك ب فالمطلوب البرهنة على أنه اذا كانت النقط ع ك د ب واقعة على خط

مستقيم يكون د ب ع وكذلك ع ب د على خط مستقيم والمطلوب البرهنة أيضا على ان المحل الهندسي لنقطة ط هو خط مستقيم عمود على ب د

(٦٢) اذا فرض أن ط ع مماس لقطاع مخروطي وأن ط د عمودي على هذا المنحنى ومماس لمنحن متحد مع الاول في البور فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين ط ومركز المنحنين منصف للمستقيم ع د

(٦٣) اذا فرض ان ط ع مماس لمنحن قطاع مخروطي ثابت وان ط د عمودي على هذا المنحنى ومماس لمنحن آخر متحد مع الاول في البور فالمطلوب البرهنة على ان ع د يمس منحنيا ثالثا ثابتا متحدا مع المنحنين الآخرين في البور

(٦٤) اذا رسمت مماسات موازية لمستقيم معلوم لجملة منحنيات متحدة في البور فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على قطع زائد قائم مار بهذه البورة

(٦٥) اذارسم متوازي أضلاع على منحنى قطاع مخروطي وكانت موازية أضلاعه لمستقيمين ثابتين فالمطلوب البرهنة على ان رؤسه الأربعة واقعة على قطع زائد قائم لجميع المنحنيات المشتركة في البور

(٦٦) اذا فرض أن ϵ نقطة ما على منحنى قطع ناقص κ النقطة المناظرة لها على الدائرة الأصلية فالمطلوب البرهنة على أن أحد الخطين التقريبيين للقطع الزائد المتحد مع القطع الناقص المذكور في البور وماز بنقطة ϵ يمر بنقطة ϵ

(٦٧) اذا رسمت مماسات لجملة قطاعات مخروطية مشتركة في البور من نقطة ثابتة على المحور القاطع فالمطلوب البرهنة على أن نقطة التماس واقعة على محيط دائرة

(٦٨) اذا فرض أن أضلاع مثلث مرسوم في منحنى قطاع مخروطي تماس قطاعا مخروطيا آخر متحدا مع الأول في البور فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على الدوائر التي تماس أضلاع المثلث من الخارج

(٦٩) اذا فرض أن العمود النازل من نقطة ما على المحور القطبي لها بالنسبة لقطاع مخروطي معلوم يمر بنقطة ثابتة مثل نقطة κ فالمطلوب البرهنة على أن هذا المحور القطبي مغلف لمنحنى القطع المكافئ الذي يمر بمحوري المنحنى المعلوم . والمطلوب البرهنة أيضا على أنه يمكن تعيين منحنى القطع المكافئ أيضا اذا كان المنحنى المعلوم أحد جملة منحنيات معلومة متحدة في البور

(٧٠) اذا فرض أن κ ϵ κ مماسان لقطاع مخروطي فالمطلوب البرهنة على أن عموديين المنحنى في κ ϵ والمستقيم ϵ جميعها مماسة لمنحنى قطع مكافئ مماس لمحوري المنحنى الأول

(٧١) اذا فرض أن α β γ مثنث مرسوم في قطع ناقص وأن قطعا ناقصا آخر متحدا مع الأول في البور يمر أضلاع المثلث في α β γ واقعتان على منحنى قطع زائد متحد مع المنحنيين المذكورين في البور

(٧٢) اذا فرضت جملة قطاعات مخروطية متحدة في البور ثم رسم مستقيم من احدى البور ليقطع هذه المنحنيات فالمطلوب البرهنة على أن المماسات لهذه المنحنيات في نقط التقاطع تمس جميعها قطعاً مكافئاً ثابتاً.

(٧٣) اذا فرض أن Γ و Γ' مماسان متعامدان لقطع ناقص وأن Γ و Γ' مماسان لقطع ناقص آخر داخل الاول ومتحد معه في البور فالمطلوب البرهنة على أن النقط Γ و Γ' و Γ'' واقعة على محيط دائرة مع فرض أن Γ و Γ' هما نقطتا تقاطع المستقيمين Γ و Γ' مع المستقيمين Γ و Γ' على التناظر

(٧٤) اذا رسم من نقطة ثابتة مثل Γ المماس Γ و Γ' لأحد جملة منحنيات قطاعات مخروطية متحدة في البور فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة Γ و Γ' يمر بنقطة ثابتة أخرى

(٧٥) اذا فرض أن Γ و Γ' نقطتان حيثما اتفق على منحنى قطع ناقص بورتاه Γ و Γ' وأن Γ و Γ' يتقاطعان في Γ وأن Γ و Γ' يتقاطعان في Γ' وأن المماسين في Γ و Γ' يتقاطعان في Γ فالمطلوب البرهنة على أن Γ و Γ' واقعتان على منحنى قطع زائد متحد مع المنحنى المذكور في البور وأن Γ و Γ' مماسان للقطع الزائد المذكور

الفصل الخامس

قطاعات المخروط

١٢١ - تعريف - السطح الذي يتولد من حركة خط مستقيم ماز بنقطة ثابتة مثل نقطة ف بحيث يمر على الدوام بنقط محيط دائرة مستويا عمود على المستقيم الواصل بين مركزها α ونقطة ف يسمى (مخروطا دائريا قائما) . وتسمى نقطة ف (رأس) هذا المخروط . والمستقيم α ف (محوره)

١٢٢ - اذا قُطع مخروط دائري قائم بمستو نخط التقاطع هو دائري

قطاع مخروطي

فمن الواضح أنه اذا قُطع المخروط المذكور بمستو عمود على محوره نخط التقاطع يكون دائرة

لنفرض α ا ع مستويا قاطعا أيا كان ولنفرض أن مستوى الرسم يشتمل على محور المخروط ف α وأن مستوى الرسم المذكور عمود على المستوى القاطع وأن ف ك α ف ك هما رأسا المخروط الموجودان في مستوى الرسم ثم نفرض أن المستوى القاطع يقطع المستوى ك ف ك في الخط α س د

واذا فيمكن رسم كرة مركزها هو مركز الدائرة التي تمس المستقيمتين الثلاثة ف ك α ف ك α د وتمس المستوى α ع في نقطة مثل نقطة س د على α د وتمس المخروط في دائرة مثل ل س ل بفرض ان ل ل هو قطر الدائرة في مستوى الرسم

ثم فصل ع. سه وتنزل ع. ام عمودا على وى

ومن هنا يكون $٢٤ : ٤ = ٦٤ : ٤$ و

== كل : ه و

$$= \alpha_l : \alpha_u$$

== أسن: أو

وبناء عليه فالمنحنى α ع هو قطاع مخروطى بوترته نقطة σ ودليله ω ويكون القطاع المخروطى المذكور قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً على حسب ما اذا كان α σ أو α أصغر أو مساوياً أو أكبر من α و α على حسب ما اذا كانت الزاوية $\angle \alpha$ σ أصغر أو مساوية أو أكبر من الزاوية $\angle \alpha$ و α الزاوية $\angle \alpha$ σ وإذا فـ α يكون المنحنى قطعاً ناقصاً أو زائداً على حسب ما اذا كان المستوى القاطع يقطع α σ α في نقطتين في جهة واحدة أو في جهتين مختلفتين من الرأس σ ويكون قطعاً مكافئاً اذا كان المستوى القاطع موازياً لأحد رؤوس المخروط

نتيجة ١ — خطوط تقاطع أى مخروط دائرى قائم معلوم بمستويات متوازية هي قطاعات مخروطية متساوية في الاختلاف المركزى

نتيجة ٢ — الزاوية الواقعة بين الخطين التقرابين للقطاع الزائدى لمخروط دائرى قائم تساوى الزاوية الواقعة بين المستقيمين اللذين يحددان من قطع هذا المخروط بمستوى مواز للقطاع المذكور ومار بالرأس

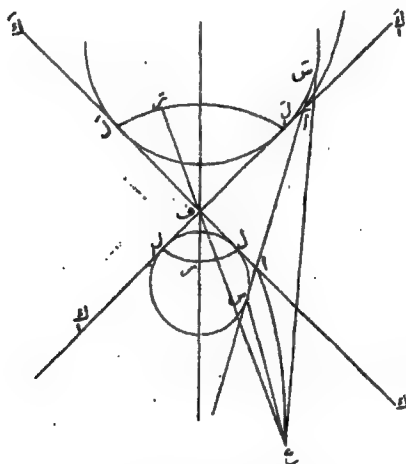
١٢٣ — وهناك برهان آخر على أن خط تقاطع مستو بمخروط دائرى قائم هو قطاع مخروطى ولكن هذا البرهان يشترط فيه أن لا يكون المستوى القاطع موازياً لأحد رؤوس المخروط

لنفرض أن مستوى الرسم يشتمل على محور المخروط وانه عمود على المستوى القاطع وان α σ α σ هما رأسا المخروط الموجودان بمستوى الرسم

وحيث انه مفروض ان خط تقاطع المستوى القاطع بالمستوى α σ α غير مواز لأحد الراسين α σ α فيلزم أن يقطعهما في نقطتي α σ α على التناظر

فيمكن رسم كزين تمس كل منهما المستوى القاطع في نقطة ما على المستقيم ٦١ وتمس المخروط في دائرة مستويها عمود على محور المخروط [ومراكز الكرتين هما مركزا دائرتين في المستوى ك ف ك ومماسيتن للمستقيمت الثلاثة أ ف ٦٦ ف ٦١]

ثم نفرض سه كاسه نقطتي تماس الكرتين بالمستوى القاطع ونفرض
ان لسه ل ك ل س ل هما دائرتا تماس الكرتين بالخروط



ثم نفرض E نقطة ما على خط التقاطع ونصل E بـ K و E بـ L ف
نفرض أن E F يقطع دائرتي تماس الكرتين في نقطتي K و L على التناظر
فيكون E بـ K = E بـ L لانهما مماسان لكرة واحدة
وكذلك E بـ L = E بـ K

وإذا فإذا كان ٦٦١ في جهة واحدة من الرأس يكون

$$\hat{v}v = \hat{v}^{\text{re}}v + \hat{v}^{\text{im}}v$$

وإذا كان ٦٦ في جهتين مختلفتين من الرأس (كما في الشكل) يكون

$$v v = e e$$

ولكن من الواضح ان f ثابتان وحينئذ يكون s ثابتا
واذا خط التقاطع بالمستوى هو قطاع مخروطي بورتاه نقطتا تماس الكرتين

اللتين يمكن رسمهما داخل المخروط مماسيتين للمستوى التقاطع

١٢٤ - واضح من الشكل المرسوم ببند ١٢٢ أن

$\Gamma f - \alpha f = \dot{\Gamma} f - \alpha f = \Gamma f - \alpha f = \Gamma f - \alpha f$

وكذلك واضح من الشكل المرسوم بيند ١٢٣ أن

$$6f + af = 11 + 11 = 22 = 6s + as$$

وحيث أن فراس المخروط الدائري القائم المار ذلك الرأس بقطع ناقص

(أوزائد) معلوم یازم أن یکون علی قطع زائد (أو قطع ناقص) فی مستو

عمود على مستو المنحنى المعلوم ومار بمحوره القاطع وبورتاه هما رأسا القطع

الناقص (أو الزائد) المعلوم ورأساه هما البورتان

وبالعكس إذا فرض أن ٦١ هو المحور القاطع لقطع ناقص (أوزائد)

معلوم دسہ ۶ سہ ہما البورتان ۶ ف نقطة ماعلى القطع لزائد (أو الناقص)

الذى مستويه عمود على مستوى المنحنى المعلوم وبورتاهما نقطتا ٦٦

ومحوره القاطع هو سبب سبب يلزم أن يوجد محروط دائري قائم رأسه نقطة ف

مما را بالمنحنى المعلوم

* هذه العلامة تدل على الفرق بين الكميتين بدون بيان أيهما هو الأكبر

لأن خط تقاطع مستوى المنحنى المعلوم بالمخروط الدائرى القائم الذى راسما هـ ا ٦ ف ٦ هو قطاع مخروطى محوره القاطع هو المستقيم ا ٦ وحيث ان
 $ف ٦ - ف ٦ = ا ٦ - ا ٦ = ا ٦ - ا ٦$ - $ا ٦ - ا ٦ = ا ٦ - ا ٦$ - $ا ٦ - ا ٦ = ا ٦ - ا ٦$
 هما بورتا هذا القطاع بحيث يكون القطاع المذكور هو نفس المنحنى المعلوم

[واذا كان المنحنى المعلوم قطاعا مكافئا رأسه نقطة ا وبورته $ا ٦$ تكون
 اى نقطة مثل ف على قطع مكافئ آخر بورته نقطة ا ورأسه $ا ٦$ ومستويه
 عمود على مستوى القطع المكافئ المعلوم هى رأس مخروط دائرى قائم ماز
 بالقطع المكافئ المعلوم]

(واذا فيمكن ان يمر عدد لانها من المخاريط الدائرية القائمة بأى قطاع
 مخروطى معلوم)

١٢٥ - لنفرض ف رأس أحد المخاريط الدائرية القائمة التى تمر
 بمنحنى معلوم ولنفرض أن ع د وترما فى المنحنى المعلوم ماز بنقطة ثابتة ك
 ثم نفرض أن الراسمين ف ع ٦ ف د للمخروط يقطعان قطاعا دائريا ثابتا
 فى تقطعى ع ٦ ف فواضح أن ع ٦ يمر بنقطة ثابتة مثل نقطة ك التى
 هى نقطة تقاطع ف ك بمستوى القطاع الدائرى ثم اذا فرض أن المستقيمين
 اللذين يمسان المنحنى المعلوم فى ع ٦ د يتقاطعان فى نقطة ط يكون
 المستويان ف ع ط ٦ ف د مستويين مماسين للمخروط ويقطعهما القطاع
 الدائرى فى الخطين المماسين ع ط ٦ د ويكون ف ط ط خطا
 مستقيما وهو خط تقاطع المستويين المماسين للمخروط فى تقطعى ع ٦ د
 فى تقطعى ع ٦ د

وواضح أنه اذا مرت جملة أوتار فى دائرة بنقطة ثابتة فالمماسات المرسومة
 من نهاياتها تتقاطع على مستقيم ثابت

وإذا فالحل الهندسى لنقطة طَ للاوضاع المختلفة للوترعَ دَ هو المستقيم
وَّ عَ وحيث ان ف ط طَ هو خط مستقيم فتكون نقطة ط على الدوام
فى المستوى ف وَّ عَ وهى أيضا فى مستوى المنحنى المعلوم وإذا فالحل
الهندسى لنقطة ط هو خط مستقيم

وإذا فاذا تقاطعت جملة أوتار لأى قطاع مخروطى فى نقطة ثابتة فالمماسات

المرسومة من نهاياتها لتقاطع على مستقيم ثابت [أنظر بند ١١٢]

١٢٦ تعريف — السطح الذى يتولد من حركة مستقيم بحيث يكون
عمودا على الدوام على مستوى دائرة معلومة ويكون دائما مارا بمحيط هذه
الدائرة يسمى (اسطوانة دائرية قائمة) ويسمى المستقيم المقام من مركز الدائرة
عمودا على مستويها (محور الاسطوانة)

ومن ذلك نرى أن الاسطوانة الدائرية القائمة هى الوضع النهائى لمخروط
دائرى قائم رأسه بعيدة عن القاعدة بعدا لانهايا

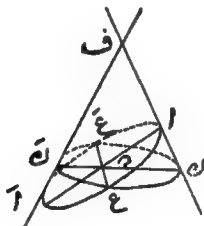
وواضح أن كل القطاعات التى تنشأ من قطع الاسطوانة بمستويات عمودية
على محورها هى دوائر متساوية وواضح أيضا أن القطاع الذى ينشأ من قطعها
بمستوى مواز للحمور يتركب من خطين مستقيمين متوازيين فإذا كان المستوى
الموازى للحمور مماسا للاسطوانة انطبق الخطان المتوازيان وصارا مستقيما واحدا
ويمكن البرهنة بالطريقة المقررة بنند ١٢٣ على أن كل قطاع آخر للاسطوانة
هو قطع ناقص بورتاه نقطتا تماس الكرتين المرسومتين فى الاسطوانة بحيث
يمسان المستوى القاطع

مسائل

(١) المطلوب إيجاد المحل الهندسى لبور خطوط تقاطع مخروط دائرى
قائم بمستويات متوازية

(٢) المطلوب إيجاد أصغر زاوية لمخروط يمكن قطعه بمستوى بحيث يكون
خط التقاطع قطعاً زائدا قائماً

١٢٧ - في الطريقة المقررة ببند ١٢٢ قد أوجدنا البورة والدليل المناظر لها لكل قطاع مستو للخروط الدائري القائم ويمكن البرهنة أيضا على أن خط التقاطع بأى مستو هو قطاع مخروطى بدون احتياج لإيجاد البورة أو الدليل ولنفرض أن مستويا قاطعا يقطع المستوى العمودى المار بمحور المخروط فى المستقيم ٦١ بفرض أن نقطتي ٦١ فى جهة واحدة من نقطة ف التى هى رأس المخروط



ثم نفرض نقطة اختيارية على المنحنى مثل نقطة ع ورسم مستويا مارا بها وعمودا على محور المخروط فيقطع $\alpha\alpha'$ في نقطة د

واذا افهذا المستوى يقطع المخروط في دائرة قطرها هو ك بفرض أن ك د هما نقطتا تقاطع المستوى بالاسمين ف $\alpha\alpha'$ ف $\alpha\alpha'$ على التناظر . وكذلك يكون ك د مارا بنقطة د وعمودا على ع د

وحينئذ يكون $ع د = ك ه . د ك$

وحيث ان أضلاع كل من المثلثين $ك د ا$ $ك ه ا$ هي في اتجاهات ثابتة مهما كان وضع نقطة $د$ فتكون النسبتان $ك د : ا د$ $ك ه : ا ه$ ثابتتين وإذا فتكون النسبة

$ك د . د ك : ا د . د ا$ ثابتة أيضا

وحينئذ فالنسبة $ع د : ا د . د ا$ ثابتة لجميع نقاط المنحنى وبناء عليه فالمنحنى قطع ناقص

وإذا فرض أن $ا ب ا$ في جهتين مختلفتين من الرأس يمكن البرهنة بمثل هذا البرهان على أن خط التقاطع بالمستوى هو قطع زائد وأنه في حالة ما إذا كان المستوى القاطع موازيا لاحد رواسم المخروط يكون خط التقاطع قطعاً مكافئاً

١٢٨ — النظرية الآتية تعتبر تعريفا عاما للقطاع المخروطى بدلالة البورة والدليل

إذا فرض أن محيط دائرة يمس قطاعا مخروطيا في نقطتي $ع ك$ $ع ل$ التين هما نهايتا ضعف الرأسى $ع د$ $ع ه$ للحوار القاطع فان النسبة بين طول المحاس لهذه الدائرة من نقطة على المنحنى مثل نقطة $ن$ الى طول العمود النازل من $ن$ على الخط $ع ه$ تساوى الاختلاف المركزى

لنفرض ف راس مخروط دائرى قائم ماز بالمنحنى $ا ع ا$ وأن $ا ا$ هو المحور القاطع لهذا المنحنى ثم نرسم خط التقاطع الدائرى ل $ع ل$ $ع ك$ المسار بنقطتي $ع ك$ $ع ل$ بفرض ل $ك ل$ واقعتين على الراسمين ف $ا ك$ ف $ا ل$ على التناظر وإذا فيمكن رسم كرة تمس المخروط في جميع نقاط الدائرة ل $ع ل$ $ع ك$ وحينئذ لخط تقاطع الكرة بالمستوى $ا ع ا$ هو دائرة مماسة للقطاع المخروطى في نقطتي $ع ك$ $ع ل$

ثم نفرض نقطة اختيارية على المنحنى مثل نقطة $د$ ونفرض أن خط التقاطع الدائرى المار بنقطة $د$ يقطع $ا ا$ في نقطة $م$ ويقطع $ف ا$ في $ك$ في $ك$ على التناظر

ونفرض أن $د$ يقطع الدائرة ل $ع ل$ في نقطة $ر$
واذا فالمستقيم المرسوم من نقطة $د$ مماسا للدائرة التي هي خط تقاطع الكرة بالمستوى $ا ا$ $ع$ يكون مماسا لهذه الكرة وإذا فهو مساو للمستقيم $د ر$ وكذلك يكون العمود النازل من $د$ على $ع ع$ مساويا للمستقيم $م د$

$$\text{ولكن } د ر = م د = ك ل : م د$$

$$ل ا : ا د =$$

$$ا ر : ا د =$$

وبذلك تثبت النظرية

نتيجة — مجموع اوافاضل المستقيمين المرسومين من نقطة اختيارية على قطاع مخروطى مماسين لدائرتين تمس كل منهما المنحنى فى نهايتى أى وتر عمود على المحور التقاطع هو ثابت

مسائل على الفصل الخامس

(١) المطلوب بيان كيفية قطع مخروط معلوم بحيث يكون خط التقاطع قطعاً مكافئاً معلوم طول وتره البورى العمودى

(٢) اذا كانت زاوية رأس المخروط قاعة فالمطالوب البرونة على أن المحور الأكبر لأى قطاع ناقصى يساوى الفرق بين نصفى القطرين للكرتين البوريتين

(٣) إذا فرض أن ع ك ع نهايتا قطر من أقطار قطاع ناقصى أو زائدى مخروط دائرى قائم فالمطلوب البرهنة على أن مجموع بعدى ع ك ع عن رأس المخروط ثابت

(٤) إذا فرض أن قطاعين فى مخروط دائرى قائم لهما دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين الوترين البورىين العموديين للقطاعين المذكورين تساوى النسبة بين الاختلاف المركزى فيهما

(٥) المطلوب البرهنة على أن المحور الاصغر للقطاع الناقصى فى مخروط دائرى قائم هو وسط تناسبى بين قطرى الكرتين البورىتين

(٦) المطلوب البرهنة على أن الوتر البورى العمودى لأى قطاع مستو فى مخروط دائرى قائم معلوم يتغير بتغير العمود النازل من رأس المخروط على مستوى القطاع

(٧) إذا فرض أن قطاعين مختلفين فى مخروط لهما دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن الخط الواصل بين بورتيهما يمر برأس المخروط

(٨) المطلوب البرهنة على أنه يمكن إيجاد قطاعين ناقصيين لمخروط معلوم تكون بورة كل منهما نقطة معلومة فى المخروط

(٩) إذا رسم مخروطان مماسان لكرتين معلومتين فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين الاختلافين المركزين للتحنيين الناشئين من قطع المخروطين باى مستو هى ثابتة

(١٠) المطلوب البرهنة على أن محور المخروط الدائرى القائم الذى أحد قطاعاته المستوية مسخن معلوم ذو مركز هو مماس لمنحن دى مركز أيضا ويكون هذا المنحنى قطعاً ناقصاً أو زائداً على حسب ما إذا كان المنحنى المعموم قطعاً زائداً أو ناقصاً

(١١) اذا قطع مخروط دائرى قائم بمستويات عمودية على مستو معلوم مشتمل على محور المخروط فنشأ من التقاطع قطاعات ناقصة وكانت محاورها الصغرى ذات طول ثابت فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز هذه القطاعات هو قطع زائد

(١٢) اذا فرض مخروطان مشتركان فى الرأس ومحوراهما متعامدان وزاويتا رأسيهما متكاملتان وقطعهما بمستو عمود على مستوى المحورين. فالمطلوب البرهنة على أن بعدى احدى بورق القطاع الناقص عن بورق القطاع الزائدى يساويان بعدى رأس القطع الناقص عن رأس المخروط

(١٣) المطلوب البرهنة على أنه اذا قطع مخروط دائرى قائم بجملة مستويات مارة بنقطة واحدة على المحور المحل الهندسى لمراكز منحنيات القطاعات هو السطح المتولد من دوران قطع زائد حول محوره القاطع

(١٤) اذا فرض أن الوتر البورى العمودى لقطاع مستو فى مخروط دائرى قائم مفروض هو ذو طول معلوم فالمطلوب البرهنة على أن بورق هذا المنحنى واقعتان على السطح المتولد من دوران قطع زائد حول محوره القاطع

(١٥) اذا فرض أن ك ك مركزا كرتين مرسومتين فى مخروط دائرى قائم مماسيتين لمستو حيثما كان فالمطلوب البرهنة على أن الكرة التى قطرها ك ك تمر بالدائرة الاصلية لمنحنى تقاطع المخروط بهذا المستوى

(١٦) المطلوب البرهنة على أن دائرة الاستدلال لأى قطاع مستو فى مخروط هى واقعة على الكرة المارة بدائرتى تماس الكرتين البوريتين

(١٧) المطلوب البرهنة على أن الاسطوانة القائمة التى قاعدتها قطع ناقص معلوم يمكن قطعها بطريقتين بحيث يكون منحنى التقاطع محيط دائرة وأنه يمكن على الدوام رسم كرة تمر بأى قطاعين دائريين غير متوازيين

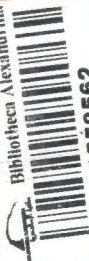
(١٨) اذا تولد سطح من دوران قطع ناقص حول محوره الأكبر ورسم مستو ليقطع هذا السطح ويمس في نقطة s كرة مرسومة فيه فالمطلوب البرهنة على أن منحنى التقاطع هو قطع ناقص بوتره s .

(١٩) المطلوب البرهنة على أن مراكز القطاعات الناقصية لمخروط دائري قائم والتي محاورها الكبرى متساوية الطول هي واقعة على السطوح المتولدة من دوران قطع ناقص حول أحد محوريه

(٢٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لرؤوس مغاريط دائرية قائمة مآزة بقطاع مخروطى هو قطاع مخروطى من النوع الآخر وفى مستو عمودى على مستوى المنحنى المعلوم ورأساه هما بورتا المنحنى الاوّل وبورتاهما رأسا المنحنى الاوّل والمطلوب استنتاج أن مجموع أوافاضل بعدى نقطة متحركة فى أحد هذين المنحنيين عن أى نقطتين ثابتتين فى المنحنى الآخر هو ثابت

تم الجزء الأول بحمد الله وحسن عنايته
و يليه الجزء الثانى

Bibliotheca Alexandrina



0558562